الرياضيات

الثاني المتوسط

الاستاذ إبراهيم الخالدي

07702701853

الفصل الاول : الاعداد النسبية

(1-1) ترتيب العمليات على الاعداد النسبية

فكرة الدرس: استعمال ترتيب العمليات على الاعداد النسبية لتبسيط جملة عددية

المفردات : *ترتيب العمليات *جملة عددية *

(1-1-1) تبسيط جملة عددية تحتوي على جمع وطرح او ضرب وقسمة اعداد نسبية

تعلمت سابقا كيفية ايجاد ناتج جمع او طرح اعداد نسبية وكذلك ذرب او قسمة عددين نسبيين والان سوف نتعلم كيفية تبسيط جملة عددية تحتوي على عمليتين (جمع وطرح) او (ضرب وقسمة) لاعداد نسبية

استعمال الجمع والطرح على الاعداد النسبية

تنقسم الى ثلاثة اقسام :

١- اذا كانت المقامات متشابهة

نجمع ونطرح البسط ونكتب المقام المتشابه مرة واحدة فقط وحسب القانون

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-\frac{d}{b}=\frac{a+d-c}{b}$ اذا كان فقط بسط ومقام

اذا احتوى على عدد بجانب البسط والمقام فإننا نجمع ونطرح العدد وكذلك البسط ايضا ونكتب المقام نفسه

$$a\frac{b}{c}+d\frac{e}{c}-g\frac{h}{c}=(a+d-g)\frac{b+e-h}{c}$$

مثال) استعمل الجمع والطرح على الاعداد النسبية

1) $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-\frac{9}{7}=\frac{3+8-9}{7}=\frac{2}{7}$

2) $1\frac{4}{3}+3\frac{5}{3}-2\frac{6}{3}=(1+3-2)\frac{4+5-6}{3}=2\frac{3}{3}=\frac{9}{3}=3$

3) $5\frac{1}{3}+8\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}=(5+8-3)\frac{1+2-1}{3}=10\frac{2}{3}=\frac{32}{3}$

4) $\frac{6}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{6+2-3}{5}=\frac{5}{5}=1$

2– اذا كانت المقامات مختلفة

نستخدم عملية التحليل لإيجاد المقام المشترك الذي تقبل القسمة عليه جميع المقامات المختلفة وذلك باتباع الخطوات الاتية :

1– نحلل المقامات المختلفة الثلاثة ونجد المقام الجديد (المشترك) الذي تقبل القسمة عليه كل المقامات

2– نقسم المقام الجديد على المقام القديم

3– ناتج قسمة المقام الجديد على المقام القديم نضربه في البسط

4– نجمع ونطرح البسط ونكتب المقام الجديد مرة واحدة فقط

مثال) استعمل الجمع والطرح على الاعداد النسبية

$$1)\ \frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{5+8-6}{20}=\frac{7}{20}$$

الحل : نستخدم التحليل لمعرفة المقام الجديد

2	4	5	10
2	2	5	5
1	1	5	5
1	1	1	1

الخطوات للتوضيح فقط
غير مطلوبة في الحل

$2 \times 2 \times 5 =20$ المقام الجديد

نقسم المقام الجديد على المقام القديم

$20 \div 4 = 5$

$20 \div 5 = 4$

$20 \div 10 = 2$

ناتج قسمة المقام الجديد على المقام القديم نضربه في البسط

$5 \times 1 = 5$

$4 \times 2 = 8$

$2 \times 3 = 6$

$$2)\ 1\frac{1}{3}+3\frac{2}{5}-2\frac{7}{15}=(1+3-2)\frac{5+6-7}{15}=2\frac{5}{15}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$$

الحل : يجمع ويطرح العدد الذي بجانب البسط والمقام دون تغيير

نستخدم التحليل لمعرفة المقام الجديد

3	3	5	15
1	1	5	5
1	1	1	1

3 × 5 = 15 المقام الجديد

نقسم المقام الجديد على المقام القديم

15 ÷3= 5

15 ÷ 5 =3

15 ÷ 15=1

ناتج قسمة المقام الجديد على المقام القديم نضربه في البسط

5 × 1=5

3 × 2=6

1 × 7=7

3– العدد العشري

استعمال الجمع والطرح على الاعداد العشرية (الفارزة 0.a او 0.0a او 0.00a الى اخرى)

العدد العشري : عدد نسبي في الاصل يكتب على شكل كسر بسط a ومقام b $\frac{a}{b}$ المقام له حسب المرتبة بعد الفارزة اما 10 او 100 او 1000 اي كلما زادت المرتبة زاد المقام

ينقسم الى قسمين

1– اذا كانت عدد المراتب متساوية نجمع ونطرح الاعداد مباشرة وحسب القانون

1– قبل الفارزة لا يوجد عدد

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 1 $0.a + 0.b - 0.c = 0.(a + b - c)$

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 2 $0.0a + 0.0b - 0.0c = 0.0(a + b - c)$

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 3 $0.00a + 0.00b - 0.00c = 0.00(a + b - c)$

2– قبل الفارزة يوجد عدد

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 1 $a.d + b.e - c.f = (a + b - c).(d + e - f)$

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 2 $a.0d + b.0e - c.0f = (a + b - c).0(d + e - f)$

اذا كانت عدد المراتب بعد الفارزة 3 $a.00d + b.00e - c.00f = (a + b - c).00(d + e - f)$

مثال) استعمل الجمع والطرح على الاعداد النسبية

1) $0.8 + 0.2 - 0.6 = 0.(8 + 2 - 6) = 0.4$
2) $0.07 + 0.05 - 0.09 = 0.0(7 + 5 - 9) = 0.05$
3) $0.003 + 0.007 - 0.008 = 0.0(3 + 7 - 8) = 0.002$
4) $1.8 + 6.2 - 2.6 = (1 + 6 - 2).(8 + 2 - 6) = 5.4$
5) $6.07 + 10.05 - 9.09 = (6 + 10 - 9).0(7 + 5 - 9) = 7.02$
6) $4.003 + 8.007 - 10.008 = (4 + 8 - 10).00(3 + 7 - 8) = 2.002$

2– اذا كانت عدد المراتب مختلفة : نساوي المراتب من خلال اضافة الصفر بعد العدد الذي يقع بعد الفارزة ثم نجمع ونطرح الاعداد مباشرة

1) $0.18 + 0.2 - 0.16 = 0.18 + 0.20 - 0.16 = 0.(18 + 20 - 16) = 0.22$
2) $0.5 + 0.07 - 0.4 = 0.50 + 0.07 - 0.40 = 0.(50 + 7 - 40) = 0.17$

3) $0.13 + 0.027 - 0.125 = 0.130 + 0.027 - 0.125$
$= 0.(130 + 27 - 125) = 0.032$

4) $1.48 + 6.2 - 2.6 = 1.48 + 6.20 - 2.60$
$= (1 + 6 - 2).(48 + 20 - 60) = 5.08$

5) $6.07 + 10.5 - 9.09 = 6.07 + 10.50 - 9.09$
$= (6 + 10 - 9).0(7 + 50 - 9) = 7.48$

6) $4.138 + 8.07 - 10.08 = 4.138 + 8.070 - 10.080$
$= (4 + 8 - 10).(138 + 70 - 80) = 2.128$

استعمال الضرب والقسمة على الاعداد النسبية

في هذا الموضوع لا نحتاج الى معرفة اذا ما كان المقام متشابه او مختلف لتوحيد المقام وانما نستخدم طريقة الاختصار(وذلك بقسمة البسط والمقام على نفس العدد ان وجد) ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام بعد قلب عملية القسمة الى ضرب وكذلك قلب البسط الى مقام والمقام الى بسط

مثال) استعمل الضرب والقسمة على الاعداد النسبية

1) $\frac{36}{27} \times \frac{9}{18} \div \frac{10}{7}$

$= \frac{36}{27} \times \frac{9}{18} \times \frac{7}{10}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{7}{10}$

$= \frac{14}{10}$

$= \frac{7}{5}$

نقوم بتحويل القسمة الى ضرب مع قلب
الكسر $\frac{10}{7}$ ثم نقوم باختصارات ان
وجدت

2) $\frac{45}{16} \div \frac{9}{4} \times \frac{2}{7}$

$= \frac{45}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{7}$

$= \frac{5}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{7}$

$= \frac{10}{28}$

$= \frac{5}{14}$

نقوم بتحويل القسمة الى ضرب مع
قلب الكسر $\frac{9}{4}$ ثم نقوم
باختصارات ان وجدت

3) $\frac{25}{20} \times \frac{10}{15} - \frac{32}{100} \div \frac{4}{10}$

نقوم بتحويل القسمة الى ضرب مع قلب

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{32}{60} \times \frac{10}{4}$$
$$= \frac{5}{6} - \frac{8}{6} = \frac{5-8}{6}$$
$$= \frac{-3}{6}$$

$$4)\ \frac{42}{63} \times \frac{7}{6} + \frac{100}{72} \div \frac{50}{8}$$
$$= \frac{7}{9} \times \frac{1}{1} + \frac{100}{72} \times \frac{8}{50}$$
$$= \frac{7}{9} + \frac{2}{9}$$
$$= \frac{9}{9} = 1$$

نقوم بتحويل القسمة الى ضرب مع قلب الكسر $\frac{50}{8}$ ثم نقوم باختصارات ان وجدت وبعدها نقوم بضرب وجمع

استعمال الضرب والقسمة على الاعداد العشرية

في عملية الضرب لا نحتاج الى اضافة الصفر لنساوي المراتب ولا يهم اذا كان المرتبة بعد الفارزة متساوية ام لا بل نضرب العدد ونحسب المراتب الموجودة اما في عملية القسمة نضيف الصفر لمساواة المرتبة اذا كان البسط يختلف عن المقام

وهناك ثلاث حالات لعملية القسمة على الاعداد العشرية

1– اذا كان البسط عدد صحيح (موجب او سالب او صفر) والمقام عدد عشري (مرتبة واحدة او مرتبتين او ثلاث مراتب الى اخره نضيف صفر ونحذف المرتبة $\frac{a}{0.b} = \frac{a0}{b}$ $\frac{a}{0.0b} = \frac{a00}{b}$ $\frac{a}{0.00b} = \frac{a000}{b}$

2– اذا كان البسط عدد عشري (يحتوي على فارزة) والمقام عدد عشري (يحتوي ايضا على فارزة) له حالتان

١– اذا كان المرتبة في البسط تساوي المرتبة في المقام نحذف الفارزة مباشرة

$\frac{0.a}{0.b} = \frac{a}{b}$ $\frac{0.0a}{0.0b} = \frac{a}{b}$ $\frac{0.00a}{0.00b} = \frac{a}{b}$ الى اخرى

3– اذا كانت المرتبة في البسط تختلف عن المقام نضيف الصفر لنساوي المرتبة ثم نحذف الفارزة

$\frac{0.0a}{0.b} = \frac{0.0a}{0.b0} = \frac{a}{b0}$ $\frac{0.a}{0.0b} = \frac{0.a0}{0.0b} = \frac{a0}{b}$ $\frac{0.a}{0.00b} = \frac{0.a00}{0.00b} = \frac{a00}{b}$ الى اخرى

مثال / استعمل الضرب والقسمة على الاعداد النسبية

$$1)\ 0.6 \times 0.8 \div 0.4$$
$$= 0.48 \div 0.4$$
$$= 0.48 \div 0.40$$
$$= 48 \div 40$$
$$= 1.2$$

عند تقسيم 0.48÷0.4 نقوم
بأضافة صفر الى العدد 0.4 لتساوي

$2)\ 4.9 \div 0.7 + 4.8 \div 0.12$
$= 49 \div 7 + 4.80 \div 0.12$
$= 7 + 480 \div 12$
$= 7 + 40$
$= 47$
$3)\ 0.81 \div 0.9 \times (-0.05)$
$= 0.81 \div (-0.045)$
$= 0.810 \div (-0.045)$
$= 810 \div -45 = -18$

(1-2) الاس السالب والصورة العلمية

فكرة الدرس : * كيفية حساب مقادير تتضمن اسسا سالبة * التعبير عن عدد بالصورة العلمية

المفردات : * الاس (القوة) * الصورة العلمية * الصورة الرقمية *

(1-2-1) الاس السالب

تعلمت سابقا في الصف الاول المتوسط العدد الاسي وكيفية التعبير عنه وكذلك خواصه الثلاثة الاولى في هذا الدرس سنأخذ الخاصية رقم ٤ من خواص الاسس وهي خاصية الاس السالب للعدد

العدد الاسي : العدد a مضروب في نفسه n من المرات ويرمز له بالرمز

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots..\times n$$

حيث a معناه العدد n عدد التكرارات

خواص الاسس

1- اي عدد اسه صفر يساوي 1 $a^0 = 1$

2- اي عدد اسه 1 يبقى العدد نفسه $a^1 = a$

3- a^n معناه العدد a مضروب في نفسه n من المرات

4- خاصية الاس السالب

اي عدد اسه سالب في البسط هو موجب في المقام $a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}$

مثال) احسب الاس السالب للعدد

$1)(6)^{-2} = \frac{1}{6^{+2}} = \frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$

$2)\ (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^{+3}} = \frac{1}{-4\times-4\times-4} = \frac{1}{-64}$

$3)\ (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^{+4}} = \frac{1}{-3 \times -3 \times -3 \times -3} = \frac{1}{81}$

$$4)(2)^{-4} = \frac{1}{2^{+4}} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$$

(2-2-1) الصورة العلمية للعدد

تعلمت سابقا في الصف الاول المتوسط الصورة العلمية للاس الموجب وفي الصف الثاني سنأخذ الصورة العلمية للاس الموجب والاس السالب للاعداد

الصورة العلمية : تحويل الاعداد من صورتها الرقمية الاعتيادية الى عدد مضروب في قوى العدد ١٠ ولها صيغتان :

قانون الصورة العلمية للاس الموجب : وتشمل الاعداد التي نهايتها اصفار ولا تحتوي على فارزة

a *يمثل العدد المذكور في السؤال بدون كتابة الصفر معه* $a \times 10^{+n}$

n عدد الاصفار المذكورة في السؤال

قانون الصورة العلمية للاس السالب : وتشمل الاعداد العشرية (الاعداد التي تحتوي على فارزة) حيث يتم من خلالها حساب عدد المراتب ويتم كتابتها على شكل اس سالب وحسب القانون

a *يمثل العدد المذكور في السؤال بدون كتابة الصفر معه* $a \times 10^{-n}$

n عدد المراتب بعد الفارزة

مثال) جد الصورة العلمية للعدد

1) $2000000 = 2 \times 10^{6}$

2) $0.00000009 = 9 \times 0.00000001 = 9 \times 10^{-8}$

3) $0.00125 = 125 \times 10^{-5}$

4) $1020000 = 102 \times 10^{4}$

(3-1) خصائص القوى (الاسس)

(3-1-1)ضرب قوتين لهما نفس الاساس

فكرة الدرس : ▪ ضرب قوتين لهما نفس الاساس ▪ قسمة قوتين لهما نفس الاساس ▪ رفع قوة الى قوة

المفردات : الاساس ،الاس

تعتبر الخاصية رقم 5 من خواص العدد الاسي والتي تنص على انه :

عند الضرب نجمع الاسس بشرط تشابه الاساس $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$

ولها اربع حالات :

1- اذا كان الاس الاول والاس الثاني كلتاهما لهما اشارة موجبة فإن الناتج عدد صحيح موجب او سالب

$$a^{+m} \times a^{+n} = a^{+m+n}$$

2– اذا كان الاس الاول اشارته موجب والاس الثاني سالب

$$a^{+m} \times a^{-n} = a^{+m-n}$$

فاننا نأخذ اشارة الاكبر ونطرح الاس الاول من الثاني فإذا كان ناتج طرح الاس سالب فالناتج عدد كسري بسط ومقام اما اذا كان ناتج طرح الاسس موجب فالناتج عدد صحيح

3– اذا كان الاس الاول اشارته سالب والاس الثاني موجب

$$a^{-m} \times a^{+n} = a^{-m+n}$$

فاننا نأخذ اشارة الاكبر ونطرح الاس الاول من الثاني فإذا كان ناتج طرح الاس سالب فالناتج عدد كسري بسط ومقام اما اذا كان ناتج طرح الاسس موجب فالناتج عدد صحيح

4– اذا كان الاس الاول سالب والاس الثاني سالب نجمع الاسس ونضع الاشارة سالب نفسها ويكون ناتج الجمع عدد كسري بسط ومقام

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$$

لا يشغلنَّك عن ذكر الله شاغل
فهو الباقي وكلُ ما سواهُ زائل

مثال) جد ناتج الضرب بوصفه قوة واحدة

$$1)\ 2^4 \times 2^1 = 2^{4+1} = 2^5 = 32$$

$$2)\ 3^{-2} \times 3^{-1} = 3^{(-2)+(-1)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$3)\ 4^{-3} \times 4^1 = 4^{-4+1} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$4)\ 5^2 \times 5^{-4} = 5^{2+(-4)} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

(1–2–3)قسمة قوتين لهما نفس الاساس

تعتبر الخاصية رقم 6 من خواص العدد الاسي والتي تنص على انه :

عند القسمة نطرح الاسس بشرط تشابه الاساس $a^m \div a^n = a^{m-n}$ او $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ولها اربع حالات :

1– اذا كان اس البسط موجب واس المقام موجب نستخدم الطرح للاسس ونأخذ اشارة الرقم الاكبر

$$\frac{a^{+m}}{a^{+n}} = a^{+m-n}$$

2– اذا كان اس البسط موجب واس المقام سالب نستخدم عملية الجمع للاسس لان اي اشارتين متشابهتين متتاليتين تكون موجبة ويكون الناتج عدد صحيح موجب او سالب

$$\frac{a^{+m}}{a^{-n}} = a^{+m+n}$$

3– اذا كان اس البسط سالب واس المقام موجب نستخدم عملية الجمع وناخذ نفس الاشارة ويكون الاس سالب والناتج عدد كسري بسط ومقام

$$\frac{a^{-m}}{a^{+n}} = a^{-m-n}$$

4– اذا كان اس البسط سالب واس المقام سالب نستخدم عملية الطرح وناخذ اشارة الرقم الاكبر

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n}$$

مثال) احسب الاسس لكل ما يأتي

$1)\ 2^4 \div 2^1 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$

$2)\ 3^{-2} \div 3^{-1} = 3^{(-2)-(-1)} = 3^{-2+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$3)\ 4^{-2} \div 4^1 = 4^{-2-1} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

$4)\ 5^2 \div 5^{-2} = 5^{2-(-2)} = 5^{2+2} = 5^4 = 625$

(1–3–3) رفع قوتين لهما نفس الاساس

تعتبر الخاصية رقم 6 من خواص العدد الاسي والتي تنص على انه:

عند رفع قوة الى قوة اخرى يتحول الى ضرب $(a^m)^n = a^{m\times n}$

في هذا الموضوع لا نجمع ولا نطرح الاسس وانما نضرب الاسس واشارتها

مثال) احسب الاسس لكل ما يأتي

$1)\ (2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64$

$2)\ (3^{-2})^{-2} = 3^{(-2)\times(-2)} = 3^4 = 81$

$3)\ (4^{-2})^1 = 4^{-2\times 1} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

$4)\ (5^2)^0 = (5)^{2\times 0} = (5)^0 = 1$

$5)\ (6^0)^3 = (6)^{0\times 3} = (6)^0 = 1$

(1–4) الكسور العشرية الدورية والصورة العلمية للعدد باستعمال الحاسبة

نستخدم نفس خطوات استعمال الجمع والطرح على الاعداد النسبية وكذلك استعمال الضرب والقسمة على الاعداد النسبية لكن في اخر خطوة نقسم البسط على المقام على شكل فارزة عشرية اي نكتب مرتبتين بعد الفارزة

مثال) استعمل الحاسبة لتجد ناتج الجمع والطرح على صورة كسر عشري

1) $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-\frac{9}{7}$

$=\frac{3+8-9}{7}=\frac{2}{7}=0.28$

2) $1\frac{4}{3}+3\frac{5}{3}-2\frac{6}{3}$

$=(1+3-2)\frac{4+5-6}{3}$

$=2\frac{3}{3}=\frac{9}{3}=3$

3) $5\frac{1}{2}+8\frac{2}{6}-3\frac{1}{3}$

$=(5+8-3)\frac{3+2-2}{6}$

$=10\frac{3}{6}=\frac{63}{6}=10.5$

4) $\frac{6}{5}+\frac{2}{4}-\frac{3}{10}$

$=\frac{24+10-6}{20}$

$=\frac{28}{20}=\frac{7}{5}=1.4$

مثال) استعمل الحاسبة لتكتب ناتج الضرب والقسمة على صورة كسر عشري

1) $\frac{36}{27}\times\frac{9}{18}\div\frac{10}{7}$

$=\frac{36}{27}\times\frac{9}{18}\times\frac{7}{10}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{7}{10}$

$=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1.4$

2) $\frac{45}{16}\div\frac{9}{4}\times\frac{2}{7}$

$$= \frac{45}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = 0.35$$

$$3)\ \frac{25}{20} \times \frac{10}{15} - \frac{32}{100} \div \frac{4}{10}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{32}{60} \times \frac{10}{4}$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{8}{6} = \frac{5-8}{6}$$

$$= \frac{-3}{6} = -0.5$$

$$4)\ \frac{42}{63} \times \frac{7}{6} + \frac{100}{72} \div \frac{50}{8}$$

$$= \frac{7}{9} \times \frac{1}{1} + \frac{100}{72} \times \frac{8}{50}$$

$$= \frac{7}{9} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{9}{9} = 1$$

(1–5) تبسيط الجمل العددية الكسرية

فكرة الدرس : تبسيط الجمل العددية الكسرية التي تحتوي على جذور وقيمة مطلقة وقوى وصورة علمية

المفردات : جذر ، مربع كامل

نتخلص من العدد الجذري باستخدام التحليل للعدد الجذري

حيث العدد داخل الجذر حاصل ضرب عدد متشابهين لذلك نأخذ عدد واحد بعد تحليله ونكتبه بدون جذر حسب الخاصية

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = +a$$

اما اذا كان الجذر التكعيبي فمن كل 3 اعداد متشابهة ناخذ عدد 1 بعد تحليله ونكتبه بدون جذر

$$\sqrt[3]{+a^3} = \sqrt[3]{+a} \times \sqrt[3]{+a} \times \sqrt[3]{+a} = +a$$

$$\sqrt[3]{-a^3} = \sqrt[3]{-a} \times \sqrt[3]{-a} \times \sqrt[3]{-a} = -a$$

وخواص القيمة المطلقة للعدد المطلق

1– اي عدد موجب في القيمة المطلقة يبقى موجب $+a = |+a|$

2– اي عدد سالب في القيمة المطلقة يصبح موجب $+a = |-a|$

مثال) بسط الجمل العددية الكسرية

$$1)\ \frac{\sqrt{9}}{|-7|}+\frac{|-8|}{7}-\frac{|9|}{7}$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-\frac{9}{7}$$

$$=\frac{3+8-9}{7}$$

$$=\frac{2}{7}$$

$$2)\ 1\frac{|4|}{\sqrt{9}}+3\frac{\sqrt{25}}{|3|}-2\frac{\sqrt{36}}{|-3|}$$

$$=1\frac{4}{3}+3\frac{5}{3}-2\frac{6}{3}$$

$$=(1+3-2)\frac{4+5-6}{3}$$

$$=2\frac{3}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$3)\ 5\frac{1}{\sqrt{4}}+8\frac{|-2|}{\sqrt{36}}-3\frac{|-1|}{\sqrt{9}}$$

$$=5\frac{1}{2}+8\frac{2}{6}-3\frac{1}{3}$$

$$=(5+8-3)\frac{3+2-2}{6}$$

$$=10\frac{3}{6}=\frac{63}{6}$$

$$4)\ \frac{\sqrt{36}}{|-5|}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}-\frac{3}{|10|}$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{2}{4} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{24 + 10 - 6}{20}$$

$$= \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$$

5) $\frac{\sqrt{36}}{|-27|} \times \frac{\sqrt{81}}{|18|} \div \frac{|-10|}{\sqrt{49}}$

$$= \frac{6}{27} \times \frac{9}{18} \div \frac{10}{7}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

6) $\frac{|-45|}{16} \div \frac{|9|}{\sqrt{16}} \times \frac{\sqrt{4}}{7}$

$$= \frac{45}{16} \div \frac{9}{4} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{45}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

الفصل الثاني :الاعداد الحقيقية

(2–1)مفهوم الاعداد الحقيقية

العدد الحقيقي R : العدد الناتج من اتحاد الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية

$$R = Q \cup Q'$$

العدد النسبي Q: عدد يكتب على شكل كسر بسط ومقام $\frac{a}{b}$ بشرط المقام لا يساوي صفر $b \neq 0$

كيف نعرف ان العدد نسبي = اذا كان عدد طبيعي مقامه واحد $\frac{+a}{1}$ اذا كان العدد صحيح مقامه 1 $\frac{+a}{1}$ و $\frac{-a}{1}$

اذا كان المقام اكبر من 1 $\frac{a}{b}$ حيث $b = 2, 3, 4, 5, \dots \dots$

العدد غير النسبي 'Q:

عدد يكتب على شكل كسر بسط ومقام $\frac{a}{b}$ والمقام له يساوي صفر $b = 0$ ،كيف نعرف ان العدد غير نسبي :

اذا كان العدد تحت الجذر اشارته سالب $\sqrt{-a}$

اذا كان العدد تحت الجذر موجب وناتجه على شكل عدد عشري (يحتوي على فارزة) $\sqrt{+a}$

اذا كان المقام صفر $\frac{a}{0}$

العدد الصحيح Z: عدد نسبي في الاصل يكتب على شكل بسط ومقام المقام له دائما ١ ويشمل الاعداد الموجبة والسالبة والصفر ويرمز له بالرمز Z حيث $Z = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$

كيف نعرف ان العدد صحيح اذا كان العدد $+a = \frac{+a}{1}$ و $-a = \frac{-a}{1}$

العدد الطبيعي N : عدد نسبي في الاصل يكتب على شكل بسط ومقام المقام له دائما ١ ويشمل الاعداد الموجبة والصفر ويرمز له بالرمز N حيث

$$N = \{0, +1, +2, +3, \dots\}$$

كيف نعرف ان العدد صحيح اذا كان العدد $+a = \frac{+a}{1}$

ملاحظة : الاعداد الطبيعية N جزء من الاعداد الصحيحة Z

الاعداد الصحيحة Z جزء من الاعداد النسبية Q

الاعداد النسبية Q جزء من الاعداد الحقيقية R

مثال) صنف الاعداد الاتية هل هي صحيحة او نسبية او غير نسبية او حقيقية

1) $3 = \frac{+3}{1}$ طبيعي صحيح نسبي حقيقي

2) $-5 = \frac{-5}{1}$ غير معرف

3) $\frac{7}{5}$ نسبي حقيقي

4) $5\frac{3}{4} = \frac{4 \times 5 + 3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4}$ نسبي حقيقي

5) 0.25 نسبي غير حقيقي

6) $\frac{9}{0}$ غير نسبي حقيقي

(2_2) خصائص الاعداد الحقيقية

خاصية التبديل او الابدال : نطبق شرط الابدال على العمليات الاربعة (الجمع+ ، الطرح−، القسمة ÷ ،الضرب×)

1_ عملية الجمع : $a + b = b + a$

$$5 + 4 = 4 + 5 = 9$$

2_ عملية الطرح $a - b \neq b - a$ لا تتحقق

والسبب في ذلك $1 - 2 \neq 2 - 1 \rightarrow -1 \neq 1$

3_ عملية الضرب $a*b=b*a$ مثلا $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$

4_ عملية القسمة لا تتحقق $a \div b \neq b \div a$ لا تتحقق لان

$$8 \div 2 \neq 2 \div 8 \rightarrow 4 \neq \frac{1}{4}$$

2_ خاصية التجميع : كما اوضحنا في الحالة السابقة فإن الطرح والقسمة لا يحققان الخواص لذلك سنكتفي بالجمع والضرب

عملية الجمع : $(a + b) + c = a + (b + c)$ مثلا

$$(5 + 4) + 6 = 5 + (4 + 6) = 5 + 10 = 15$$

عملية الضرب $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ مثلا

$$(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60$$

3_ خاصية التوزيع : عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$2 \times (7 + 8) = 2 \times 7 + 2 \times 8 = 14 + 16 = 30$$

4_ العنصر المحايد :

في الجمع العنصر المحايد هو الصفر لان اي عدد نجمعه مع الصفر يبقى نفسه

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$4 + 0 = 0 + 4 = 4$$

في الضرب العنصر المحايد هو 1 لان اي عدد نضربه في 1 يبقى نفسه

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

$$5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$$

_5 نظير العنصر : (المعكوس) :

في الجمع نعكس اشارة العدد المعطى في السؤال حسب الخاصية

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
$$5 + \sqrt{2} = (5 + \sqrt{2}) + (-5 - \sqrt{2}) = 0$$

في الضرب نقلب البسط الى مقام والمقام الى بسط حسب الخاصية

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a$$
$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 1$$

حل تمارين تأكد من فهمك

اكتب مثال لكل خاصية من الخواص الاتية

1) $a + b = b + a$
$2 + 3 = 3 + 2 = 5$
2) $a.b = b.a$
$(5)(4) = (4)(5) = 20$
3) $a + (b + c) = (a + b) + c$
$4 + (6 + 5) = (4 + 6) + 5 = 10 + 5 = 15$
4) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
$5 \times (6 \times 2) = (5 \times 6) \times 2 = 30 \times 2 = 60$
5) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
$6 \times (5 + 4) = 6 \times 5 + 6 \times 4 = 30 + 20 = 50$

جد معكوس العدد (النظير الجمعي) للاعداد الحقيقية

1) $4\sqrt{2} - 1 = (4\sqrt{2} - 1) + (-4\sqrt{2} + 1) = 0$
2) $\sqrt{5} + \sqrt{7} = (\sqrt{5} + \sqrt{7}) + (-\sqrt{5} - \sqrt{7}) = 0$
3) $-9\sqrt{11} + \frac{1}{3} = (-9\sqrt{11} + \frac{1}{3}) + (9\sqrt{11} - \frac{1}{3}) = 0$
4) $-4\frac{2}{3} = -\frac{14}{3} = -\frac{14}{3} + \frac{14}{3} = 0$

جد النظير الضربي للأعداد الحقيقية

$$1)\ \sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{1}=1$$

$$2)\ 3\sqrt{7}-7=3\sqrt{7}-7\times\frac{1}{3\sqrt{7}-7}=1$$

$$3)\ -11\frac{2}{3}=-\frac{35}{3}=\frac{-35}{3}\times\frac{-3}{35}=1$$

$$4)\ 8\frac{2}{3}-6\frac{1}{5}=\frac{26}{3}-\frac{31}{5}=\left(\frac{26}{5}-\frac{31}{3}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{26}{5}-\frac{31}{3}}\right)=1$$

(2-3) تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على جذور تربيعية

العدد الجذري : عدد اسي في الاصل يكتب الاس له على شكل كسر (بسط ومقام) حيث

يمثل البسط m الاس داخل الجذر والمقام n الاس خارج الجذر ويكتب العدد الجذري بطريقتان هما :

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

خواص العدد الجذري :

نستعمل خواص الجذور لتبسيط الجمل العددية في حل

الخاصية الاولى والثانية تستعمل للحالات الاتية

1_ اذا كان العددان الجذريان متشابهان فإن حاصل ضربهما عدد صحيح بدون جذر في حالة الجذر التربيعي

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ حيث a يمثل اي عدد جذري

2– اذا كان العددان الجذريان مختلفان فإن حاصل ضربهما يكون عدد جذري

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

بسط الجملة العددية الاتية

$$1)\ (\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})=5+\sqrt{15}-\sqrt{15}-3=5-3=2$$

واجب :

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})=$$
$$(\sqrt{6}-\sqrt{3})\times(\sqrt{6}+\sqrt{3})=$$

2) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{7}-\sqrt{2})\times(\sqrt{7}-\sqrt{2}) = 7+\sqrt{14}-\sqrt{14}+2 = 9-2\sqrt{14}$

واجب : بسط الجملة العددية

$(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 =$

$(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2 =$

3_ لا يوجد جذر تربيعي للعدد السالب غير معرف $\sqrt{-a} = \infty$

يوجد جذر تكعيبي للعدد السالب $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

3) $\dfrac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \dfrac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \dfrac{4(2\sqrt{3})}{5(-3)} \div \dfrac{2(2\sqrt{2}\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{-15} \div \dfrac{2\sqrt{3}}{1} = \dfrac{8\sqrt{3}}{-15} \times \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4}{-15}$

واجب : بسط الجملة العددية

$\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{16}} \div \dfrac{3\sqrt[3]{64}}{2\sqrt{27}} =$

$\dfrac{2\sqrt{25}}{5\sqrt{16}} \div \dfrac{3\sqrt[3]{-8}}{2\sqrt{32}} =$

4– اذا كان المقام عدد جذري فاننا نضرب البسط والمقام في منسوب المقام (تكرار المقام للبسط والمقام) حتى يكون المقام عدد صحيح بدون جذر وحسب الخاصية

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(a)^2-(b)^2}$$

مثال) بسط الجملة العددية باستعمال منسوب المقام

1) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{15}}{3}$

حد واحد

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

حدان نفس الطريقة نكرر المقام ونعكس اشارة الحد الاوسط للمقام

2) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{12}}{2}$

3) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \times \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{6}-12(2)}{(16)(2)} = \dfrac{8\sqrt{6}-24}{32}$

واجب : بسط الجملة العددية باستعمال منسوب المقام

1) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$

2) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

3) $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} =$

ايجاد الجذر التربيعي السالب والموجب للعدد

لكل عدد صحيح موجب يوجد له جذران حقيقيان

الاول موجب

$$+\sqrt{a} \times +\sqrt{a} = +a$$

والثاني سالب

$$-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = +a$$

ويكتب بالصيغة الرياضية (القانون) للعدد الصحيح (الذي مقامه 1)

$$+a = \left[\begin{matrix} +\sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{matrix}\right.$$

للعدد النسبي

$$+\frac{a}{b} = \left[\begin{matrix} +\sqrt{\frac{a}{b}} = +\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ -\sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{matrix}\right.$$

للعدد العشري (مرتبتان فقط **0.0a**)

$$+0.0a = \frac{a}{100} = \left[\begin{matrix} +\sqrt{\frac{a}{100}} = +\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{100}} = +\frac{\sqrt{a}}{10} \\ -\sqrt{\frac{a}{100}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{100}} = -\frac{\sqrt{a}}{10} \end{matrix}\right.$$

مثال) جد الجذرين التربيعيين السالب والموجب للأعداد الاتية

1) $25 = \left[\begin{matrix} +\sqrt{25} = +5 \\ -\sqrt{25} = -5 \end{matrix}\right.$

2) $\frac{49}{81} = \left[\begin{matrix} +\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = +\frac{7}{9} \\ -\sqrt{\frac{49}{81}} = -\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = -\frac{7}{9} \end{matrix}\right.$

3) $0.36 = \frac{36}{100} = \left[\begin{matrix} +\sqrt{\frac{36}{100}} = +\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = +\frac{6}{10} \\ -\sqrt{\frac{36}{100}} = -\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = -\frac{6}{10} \end{matrix}\right.$

واجب : جد الجذرين التربيعيين السالب والموجب للأعداد الاتية

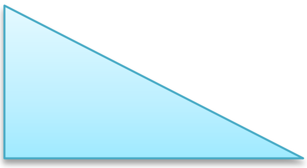
1) $64 =$ 2) $\frac{9}{16} =$ 3) $0.04 =$

عكس نظرية فيثاغوس :

نستخدم مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية والذي ينص على ان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$(\text{الوتر})^{\text{مربع}} = (\text{المجاور})^{\text{مربع}} + (\text{المقابل})^{\text{مربع}}$



مثال) حدد فيما اذا كان كل من الاضلاع الاتية تمثل مثلثا قائم الزاوية ام لا ؟

1) $6cm$, $8cm$, $10cm$

الحل : نكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نعوض قيمة المقابل $AB = 6$ المجاور $BC = 8$ الوتر $AC = 10$ في القانون

ملاحظة التعويض دائما بالتسلسل اي الرقم الاول يمثل المقابل والرقم الثاني يمثل المجاور

والرقم الثالث يمثل الوتر (الوتر دائما رقمه اكبر من المجاور والمقابل)

$$(6)^2 + (8)^2 = (10)^2$$
$$36 + 64 = 100$$
$$100 = 100$$

الاضلاع تمثل مثلث قائم الزاوية

2) $3cm$, $4cm$, $5cm$

الحل : نكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نعوض قيمة المقابل $AB = 3$ المجاور $BC = 4$ الوتر $AC = 5$ في القانون

ملاحظة التعويض دائما بالتسلسل اي الرقم الاول يمثل المقابل والرقم الثاني يمثل المجاور

والرقم الثالث يمثل الوتر (الوتر دائما رقمه اكبر من المجاور والمقابل)

$$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$25 = 25$$

الاضلاع تمثل مثلث قائم الزاوية

3) $5cm$, $6cm$, $\sqrt{61}cm$

الحل : نكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نعوض قيمة المقابل $AB = 5$ المجاور $BC = 6$ الوتر $AC = \sqrt{61}$ في القانون

ملاحظة التعويض دائما بالتسلسل اي الرقم الاول يمثل المقابل والرقم الثاني يمثل المجاور

والرقم الثالث يمثل الوتر (الوتر دائما رقمه اكبر من المجاور والمقابل)

$$(5)^2 + (6)^2 = (\sqrt{61})^2$$
$$25 + 36 = 61$$
$$61 = 61$$

الاضلاع تمثل مثلث قائم الزاوية

4) $4cm\,,5cm,6cm$

الحل : نكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نعوض قيمة المقابل $AB = 4$ المجاور $BC = 5$ الوتر $AC = 6$ في القانون

ملاحظة التعويض دائما بالتسلسل اي الرقم الاول يمثل المقابل والرقم الثاني يمثل المجاور

والرقم الثالث يمثل الوتر (الوتر دائما رقمه اكبر من المجاور والمقابل)

$$(4)^2 + (5)^2 = (6)^2$$
$$16 + 25 = 36$$
$$41 \neq 36$$

الاضلاع لا تمثل مثلث قائم الزاوية

5) $3cm\,,7cm,\sqrt{35}cm$

الحل : نكتب قانون مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نعوض قيمة المقابل $AB = 3$ المجاور $BC = 7$ الوتر $AC = \sqrt{35}$ في القانون

ملاحظة التعويض دائما بالتسلسل اي الرقم الاول يمثل المقابل والرقم الثاني يمثل المجاور

والرقم الثالث يمثل الوتر (الوتر دائما رقمه اكبر من المجاور والمقابل)

$$(3)^2 + (7)^2 = (\sqrt{35})^2$$
$$9 + 49 = 35$$
$$58 \neq 35$$

الاضلاع لا تمثل مثلث قائم الزاوية

(2-5) المستوى الاحداثي

فكرة الدرس : تمثيل جدول قيم في المستوى الاحداثي ، ايجاد المسافة بين النقطتين .

المفردات : الزوج المرتب ، المستوى الاحداثي ، نقطة الاصل ، محور السينات ، محور الصادات ، جدول القيم ، الأرباع .

(2-5-1) تمثيل جدول القيم في المستوى الاحداثي

يتكون المستوى الاحداثي من مستقيمين متعامدين في نقطة تسمى نقطة الأصل ،المستقيم الأفقي يعرف محور السينات والمستقيم العمودي يعرف بمحور الصادات والمستوى مقسم على اربع أربع ارباع .

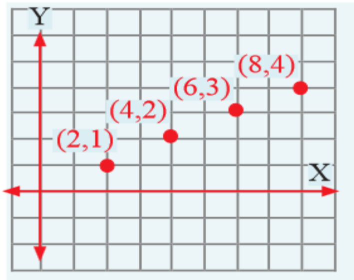
مثال (1) مثل جدول القيم التالي في المستوي الإحداثي .

عدد الجراء	2	4	6	8
الكمية (لتر)	1	2	3	4

اكتب الازواج مرتبة: (8 , 4) ، (6 , 3) ، (4 , 2) ، (2 ,1)

مثل كلَّ زوج بنقطةٍ في المستوي الإحداثي.

كل الازواج المرتبة تقع في الربعِ الاولِ.

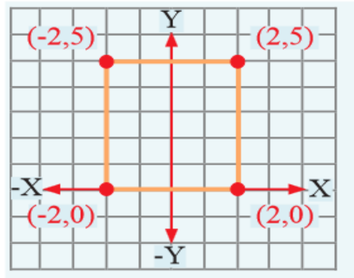


مثال (2) مثل جدول القيم التالي في المستوي الإحداثي وحدد الشكل الهندسي الذي يمثله.

X	-2	2	-2	2
Y	5	5	0	0

اكتب الأزواجَ المرتبة: (2 , 0) ، (-2 , 0) ، (2 , 5) ، (-2 ,5)

مثل كل زوج بنقطةٍ في المستوي الإحداثي، ثم صل بين النقاط الشكل الذي يمثله جدول القيم هو مستطيل .



(2-5-2) ايجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الاحداثي

الان نتعلم كيفية ايجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الاحداثي وكذلك ايجاد البعد التقريبي بين المدن باستعمال نظرية فيثاغورس .

مثال (3) مثل الزوجين المرتبين (-4,0) ، (-1,4) في المستوي الإحداثي ثم جد المسافة بينهما .

اولاً: مثل النقطتين بالمستوي الإحداثي .

ثانياً: ارسمْ مثلثاً قائم الزاوية كما في الشكل المجاور .

ثالثاً: جد طول كل ضلع من الضلعين القائمين .

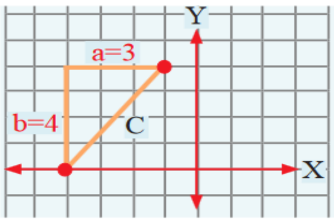
$b = 4$ وحدات ، $a = 3$ وحدات

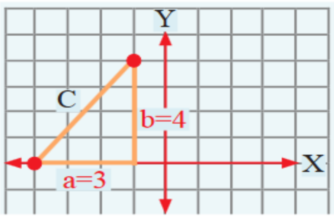
رابعاً: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر c

المسافة بين نقطتين دائماً موجبة

$$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{9+16}$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5$$

لذا المسافة بين النقطتين هو 5 وحدات



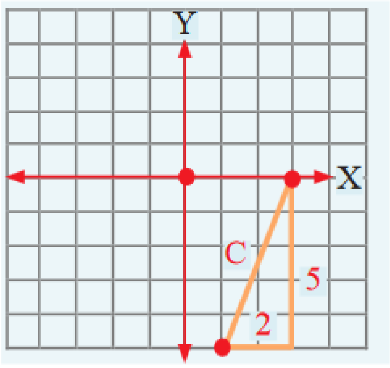


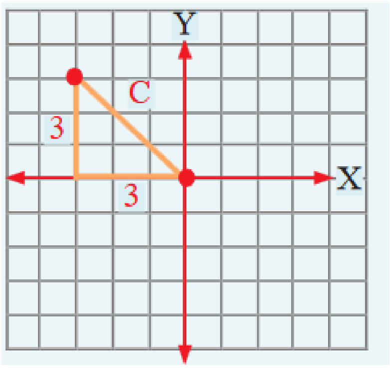
ملاحظةٌ: يمكن الحصول على المثلث القائم الزاوية كما يأتي:

1- من تقاطع المستقيمين المرسومين من النقطتين موازيان للمحورين.

2- من تقاطع العمودين المرسومين من النقطتين على المحورين.

مثال (4) مثلْ كلَّ زوجٍ من الزوجين المرتبين {(3,0)،(5- ,1)}، {(0,0)،(3,3-)} في المستوي الإحداثي ثم جد المسافة بينهما مقربة لأقرب عُشر.





اولاً: مثل كل نقطتين بالمستوي الإحداثي .

ثانياً: ارسم مثلثات قائمة الزاوية كما في الشكل المجاور .

ثالثاً: جد طول كل ضلع من الضلعين القائمين لكلِّ مثلث .

المثلث في الربعِ الرابع: وحدات $a=2$ ، وحدات $b=5$

المثلث في الربع الثاني: وحدات $a=3$ ، وحدات $b=3$

رابعاً: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر c

المثلث في الربعِ الرابع: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow c=\sqrt{4+25}$

$\Rightarrow c=\sqrt{29} \Rightarrow c\approx 5.4$

لذا المسافة بين النقطتين هو 5.4 وحدات تقريباً.

المثلث في الربع الثاني: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow c=\sqrt{9+9}$

$\Rightarrow c=\sqrt{18} \Rightarrow c\approx 4.2$

لذا المسافة بين النقطتين هو 4.2 وحدات تقريباً.

واجب :

مثل الجدول التالي في المستوى الاحداثي وحدد الشكل الهندسي الذي يمثله الجدول :

1	x	2	3	4	5	2	4	-4	0	0
	y	0	0	0	0		0	0	2	-5

مثل كل زوج من الزوجين المرتبين في مستوى الاحداثي ثم جد المسافة بينهما

1){(1,0) , (4,4)} 2){(7,2) , (3,5)}

الفصل الثالث : الحدوديات

(3-1) جمع المقادير الجبرية وطرحها

فكرة الدرس : جمع المقدار الجبري ، طرح المقدار الجبري

المفردات : جمع، طرح

(3–1–1) جمع المقدار الجبري

تعلمت سابقا جمع الحدود الجبرية المتشابهة اما في هذا الدرس سنتعرف الى جمع المقادير الجبرية (لكي نجمع مقدارين جبريين) نستعمل خصائص التبديل والتجميع في جمع الحدود المتشابهة

مثال : حل المقادير الجبرية باستعمال الجمع

1) $(3x^2+4x+5)+(5x^2+x+6)$

$=(3+4)x^2+(4+1)x+(5+6)$

$=7x^2+5x+11$

نقوم بجمع المعاملات للحدود المتشابهة

2) $(\sqrt{5}x^2y^2+6)+(3\sqrt{5}x^2y^2+9y+4)$

$=(\sqrt{5}+3\sqrt{5})x^2y^2+(0+9)y+(6+4)$

$=4\sqrt{5}x^2y^2+9y+10$

3) $(|-2|z^2w+4k+\sqrt{7})+(|10|z^2w-10k+2\sqrt{7})$

$=(2z^2w+4k+\sqrt{7})+(10z^2w-10k+2\sqrt{7})$

$=(2+10)z^2w+(4-10)k+(1+2)\sqrt{7}$

$=12z^2w+(-6)k+3\sqrt{7}$

نقوم بتخلص من علامة المطلق

4) $\left(\frac{3}{4}h^3k+5gh-3\right)+\left(\frac{2}{5}h^3k-10gh+4\right)$

$=\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)h^3k+(5-10)gh+(-3+4)$

$=\frac{15+8}{20}h^3k+(-5)gh+1$

$=\frac{23}{20}h^3k-5gh+1$

اذا وجدت عدد كسري نقوم بجمعه من خلال توحيد المقامات

ملاحظه : عند جمع اي عددين مختلفين في الاشارة نأخذ اشارة الكبير ونطرح ،اما اذا كان العددين متشابهين في الاشارة نأخذ اشارة واحدة ونقوم بجمع

مثال

مجموع محيطي المثلث والمربع ؟

الحل : محيط المربع + محيط المثلث

$=(4n^2+6y+10)+(2n^2+4y+5)$

$$= (4 + 2)n^2 + (6 + 4)y + (10 + 5)$$
$$= 6n^2 + 10y + 15$$

مثال : حمولتان من المواد الغذائية تحتوي الحمولة الاولى على الرز والسكر والطحين بالكيلو غرامات وعلى الترتيب $54x^3, 25y^5, 30z$

والحمولة الثانية من المواد نفسها $36x^3, 20y^5, 25z$

جد مجموع الحمولتين ؟

الحل : الحمولة الاولى: $54x^3 + 25y^5 + 30z$

الحمولة الثانية: $36x^3 + 20y^5 + 25z$

الحمولة الثانية + الحمولة الاولى

$$= (54x^3 + 25y^5 + 30z) + (36x^3 + 20y^5 + 25z)$$
$$= (54 + 36)x^3 + (25 + 20)y^5 + (30 + 25)z$$
$$= 90x^3 + 45y^5 + 55z$$

(2–1–3) طرح المقدار الجبري

تعلمت سابقا طرح الحدود الجبرية المتشابهة اي عند طرح حد جبري من حد جبري اخر اجمع الحد الجبري الاول مع النظير الجمعي للحد الجبري الثاني وسوف نتعلم طرح المقادير الجبرية ولطرح مقدار جبري من مقدار جبري اخر اعكس اشارة كل حد من حدود المقدار الجبري (اي النظير الجمعي للمقدار الجبري)

مثال : حمولتان من المواد الغذائية تحتوي الحمولة الاولى على الرز والسكر والطحين بالكيلو غرامات وعلى الترتيب $54x^3, 25y^5, 30z$

والحمولة الثانية من المواد نفسها $36x^3, 20y^5, 25z$

جد الفرق بين الحمولتين ؟

الحل : الحمولة الاولى : $54x^3 + 25y^5 + 30z$

الحمولة الثانية : $36x^3 + 20y^5 + 25z$

الحمولة الثانية − الحمولة الاولى

$$= (54x^3 + 25y^5 + 30z) - (36x^3 + 20y^5 + 25z)$$
$$= (54 - 36)x^3 + (25 - 20)y^5 + (30 - 25)z$$
$$= 18x^3 + 5y^5 + 5z$$

مثال : نافورة مربعة الشكل مساحتها $2m^2 - 2m - 6$ متر مربع تقع في منتصف حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $3m^2 - 4m + 5$ متر مربع ما مساحة الحديقة المحيطة بالنافورة ؟

الحل :

مساحة الحديقة − مساحة النافورة

$$= (2m^2 - 2m - 6) - (3m^2 - 4m + 5)$$

نقوم بأدخال الاشارة السالب على

$= (2m^2 - 2m - 6) + (-3m^2 + 4m - 5)$

$= (2 - 3)m^2 + (-2 + 4)m + (-6 + 5)$

$= -m^2 + 2m - 1$

مثال : حل المقادير الجبرية باستعمال الطرح

1) $(4m^2n^2 - 5) - (3m^2n^2 + x + 3)$

$= (4m^2n^2 - 5) + (-3m^2n^2 - x - 3)$

$= (4 - 3)m^2n^2 + (0 - 1)x + (-5 - 3)$

$= m^2n^2 - x - 8$

2) $(\sqrt{13}g^3h^4 + 3z^2 + 8) - (5\sqrt{13}g^3h^4 - 4z^2 + 12)$

$= (\sqrt{13}g^3h^4 + 3z^2 + 8) + (-5\sqrt{13}g^3h^4 + 4z^2 - 12)$

$= (\sqrt{13} - 5\sqrt{13})g^3h^4 + (3 + 4)z^2 + (8 - 12)$

$= -4\sqrt{13}g^3h^4 + 7z^2 - 4$

اذا وجدت عددي يحتوي على جذر في كلا القوسين نقوم بأخذ جذر واحد ونجمع معاملاته

3) $(|-24|yz + 2x + 12) - (6yz - 15x - 4)$

$= (24yz + 2x + 12) - (6yz - 15x - 4)$

$= (24yz + 2x + 12) + (-6yz + 15x + 4)$

$= (24 - 6)yz + (2 + 15)x + (12 + 4)$

$= 18yz + 17x + 16$

نقوم بتخلص من علامة المطلق

4) $\left(\frac{6}{3}x^4 + 7mn - 8\right) - \left(\frac{2}{3}x^4 - 10mn - 2\right)$

$= \left(\frac{6}{3}x^4 + 7mn - 8\right) + \left(-\frac{2}{3}x^4 + 10mn + 2\right)$

$= (\frac{6}{3} + \frac{2}{3})x^4 + (7 + 10)mn + (-8 + 2)$

$= \frac{8}{3}x^4 + 17mn - 6$

(3-2) ضرب المقادير الجبرية

فكرة الدرس : ضرب حد جبري في حد جبري ، ضرب مقدار جبري في مقدار جبري

المفردات : حد جبري ، مقدار جبري

(3-2-1) ضرب حد جبرية في حد جبري

تعلمت سابقا ضرب حد جبري في حد جبري اذا كانت المتغيرات مختلفة اما في هذا الدرس سنتعلم ضرب حد جبري في حد جبري باستعمال الخواص الاتية (نستعمل خواص الاسس الاربعة)

عند الضرب نجمع الاسس بشرط تشابه الاساس

$1)\ a^m \times a^n = a^{m+n}$

عند القسمة نطرح الاسس بشرط تشابه الاساس

$2)\ (a^m)^n = a^{m\times n}$

اي عدد اسه صفر فان قيمة العدد تساوي 1

$3)\ a^0 = 1$

اي عدد اسه ١ يبقى العدد نفسه

$4)\ a^1 = a$

مثال : جد ناتج الضرب لكل ما يأتي

نضرب العدد في العدد والمتغير في المتغير المتشابه

$1)\ (5m^2n^2)(12m^5n^2) = (5\times 12)(m^{2+5}n^{2+2}) = 60m^7n^4$

$2)\ (-25x^2y^2z)(4xy) = (-25\times 4)x^{2+1}y^{2+1}z = -100x^3y^3z$

$3)\ \left(\frac{7}{2}z^2w^2\right)\left(\frac{3}{9}zw^3\right) = \left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{9}\right)(z^{2+1}w^{2+3}) = \frac{21}{18}z^3w^3$

$4)\ (\sqrt{5}h^2k^2)(\sqrt{5}h^2k^3) = (\sqrt{5}\times\sqrt{5})h^{2+2}k^{2+3} = 5h^4k^5$

$5)\ (|-3|g^3h^2)(|4|g^4h^2) = (3g^3h^2)(4g^4h^2) = (3\times 4)g^{3+4}h^{2+2} = 12g^7h^4$

(3-2-2) ضرب حد جبري في مقدار جبري

تعلمت سابقا ضرب حد جبري في مقدار جبري باستعمال خاصية التوزيع اذا كانت المتغير ات مختلفة ولان سوف نتعلم ضرب حد جبري في مقدار جبري اذا كانت الاساسات متشابهة او مختلفة باستعمال خاصية التوزيع ايضا

$1)\ \left(\frac{1}{2}m^2n^2\right)(4mn+8)$

$= \left(\frac{1}{2}\times 4\right)m^{2+1}n^{2+1} + \left(\frac{1}{2}\times 8\right)m^{2+0}n^{2+0}$

$= 2m^3n^3 + 4mn$

$2)\ 5x^2y\,(4x^3+3x+8)$

$= (5\times 4)x^{2+3}y + (5\times 3)x^{2+1}y + (5\times 8)x^{2+0}y$

$= 20x^5y + 15x^3y + 40x^2y$

نستخدم خاصية التوزيع حيث نقوم بجمع الاسس وتضرب المعاملات للأساس المتشابه

$$3)\ 6y^2(3y^2-5x+3)$$
$$=(6\times 3)y^{2+2}-(6\times 5)y^{2+0}x+(6\times 3)y^2$$
$$=18y^4-30y^2x+18y^2$$

$$4)\ \sqrt{2}x^2y^2(\sqrt{2}xy^2-y^5)=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})x^{2+1}y^{2+2}-(\sqrt{2}\times 1)x^{2+0}y^{2+5}$$
$$=(2x^3y^4-\sqrt{2}x^2y^7)$$

مثال : ملعب مستطيل الشكل طوله بالأمتار $4x^2$ وعرضه بالأمتار $2x^3-4xy-3$ ما مساحة الملعب ؟

الحل :

عرض الملعب × طول الملعب = مساحة الملعب

$$A=4x^2(2x^3-4xy-3)$$
$$=(4\times 2)x^{2+3}-(4\times 4)x^{2+1}y-(4\times 3)x^{2+0}$$
$$=8x^5-16x^3y-12x^2$$

يا رب، لا وخزة في قلب، لا شوكةً

في درب، واجعلنا أخفّاء على الحياة.

(3-3) ضرب المقادير الجبرية

فكرة الدرس : ضرب مقدارين جبريين كل منهما في حدين ، ضرب مقدارين الاول من حدين والثاني من ثلاثة حدود

المفردات : حدانية ، ثلاثة حدود ، ضرب عمودي ، ضرب افقي

(3-3-1) ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

تعلمت سابقا ضرب حد جبري في مقدار جبري وسوف نتعلم في هذا الدرس ضرب مقدار جبري كل منهما يتكون من حدين باستعمال خاصية التوزيع هناك نوعان من الضرب الافقي والعمودي

مثال : جد ناتج الضرب لكل ما يأتي

$$1)\ (x-5)(x+5)=(x)^2-(5)^2=x^2-25$$

$$2)\ \left(\frac{1}{3}m^2-9\right)\left(\frac{1}{3}m^2+6\right)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)m^{2+2}+\left(\frac{1}{3}\times 6\right)m^2-\left(9\times\frac{1}{3}\right)m^2-(9\times 6)$$
$$=\frac{1}{9}m^4+2m^2-54$$

نقوم بعملية بضرب بطريقة

(الاول X الاول)+(الاول X الثاني)

$3)\ (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = (x)^2 - (\sqrt{5})^2 = x^2 - 5$

$4)\ (\sqrt[3]{8}n^2 + 10)(\sqrt[3]{27}n^2 - 5) = (2n^2 + 10)(3n^2 - 5)$
$= (2 \times 3)n^{2+2} - (2 \times 5)n^{2+0} + (10 \times 3)n^{0+2} - (10 \times 5)$
$= 6n^4 - 10n^2 + 30n^2 - 50$
$= 6n^4 + 20n^2 - 50$

$5)\ (|-4|gh - 3)(|4|gh + 4) = (4gh - 3)(4gh + 4)$
$= (4 \times 4)g^{1+1}h^{1+1} + (4 \times 4)g^{1+0}h^{1+0} - (3 \times 4)g^{0+1}h^{0+1} - (3 \times 4)$
$= 16g^2h^2 + 16gh - 12gh - 12$
$= 16g^2h^2 + 4gh - 12$

مثال : ملعب كرة طائرة بعداه بالأمتار $(8y+3)(8y-6)$ ما مساحة الملعب ؟

الحل /

عرض الملعب × طول الملعب = مساحة الملعب

$A = (8y + 3)(8y - 6)$
$= (8 \times 8)y^{1+1} - (6 \times 8)y^{1+0} + (3 \times 8)y^{0+1} - (3 \times 6)$
$= 64y^2 - 48y + 24y - 18$
$= 64y^2 - 24y - 18$

(3–3–2) ضرب مقدارين الاول من حدين والثاني من ثلاثة حدود

تعلمت سابقا في البند الاول من هذا الدرس ضرب مقدار جبري باستعمال خاصية التوزيع بالضرب العمودي والضرب الافقي وسوف نتعلم ضرب مقدار جبري يتكون من حدين مع مقدار جبري يتكون من ثلاثة حدود باستعمال الضرب الافقي والعمودي

مثال : جد ناتج الضرب لكل مما يأتي

$1)\ (-2x^2 + 7)(x^2 + x - 4)$
$= (-2 \times 1)x^{2+2} + (-2 \times 1)x^{2+1} + (-2 \times -4)x^{2+0} + (7 \times 1)x^{0+2} + (7 \times 1)x^{0+1} + (7 \times -4)$
$= -2x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 7x^2 + 7x - 28$
$= -2x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 7x - 28$

$2)\ (w^2 + \sqrt{3})(2w^2 - w - \sqrt{3})$

$= (1 \times 2)w^{2+2} - (1 \times 1)w^{2+1} - (1 \times \sqrt{3})w^{2+0} + (\sqrt{3} \times 2)w^{0+2} - (\sqrt{3} \times 1)w^{1+0} - (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$

$= 2w^4 - w^3 - \sqrt{3}w^2 + 2\sqrt{3}w^2 - \sqrt{3}w - 3$

$= 2w^4 - w^3 + (-1 + 2)\sqrt{3}w^2 - \sqrt{3}w - 3$

$$= 2w^4 - w^3 + \sqrt{3}w^2 - \sqrt{3}w - 3$$

$$3)\ (2y-1)(4y^2+2y+1)$$

$$= (2\times 4)y^{1+2} + (2\times 2)y^{1+1} + (2\times 1)y^{1+0} - (1\times 4)y^{0+2} - (1\times 2)y^{0+1} - (1\times 1)$$

$$= 8y^3 + 4y^2 + 2y - 4y^2 - 2y - 1$$

$$= 8y^3 - 1$$

$$4)\ \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 9\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)x^{1+2} + \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)x^{1+1} + \left(\frac{1}{2}\times 9\right)x^{1+0} - \left(3\times\frac{1}{4}\right)x^{0+2} - \left(3\times\frac{3}{2}\right)x^{0+1} - (3\times 9)$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x - 27 = \frac{1}{8}x^3 - 27$$

$$5)\ (3k+\sqrt[3]{5})(9k^2 - 3\sqrt[3]{5}k + \sqrt[3]{25})$$

$$= (3\times 9)k^{1+2} - (3\times 3\sqrt[3]{5})k^{1+1} + (3\times\sqrt[3]{25})k^{1+0} + (\sqrt[3]{5}\times 9)k^{0+2} - (\sqrt[3]{5}\times 3\sqrt[3]{5})k^{0+1} + (\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25})$$

$$= 27k^3 - 9\sqrt[3]{5}k^2 + 3\sqrt[3]{25}k + 9\sqrt[3]{5}k^2 - 3\sqrt[3]{25}k + 5$$

$$= 27k^3 + 5$$

(3–4) قسمة مقدار جبري على حد جبري

فكرة الدرس : قسمة حد جبري على حد جبري ، قسمة مقدار جبري على حد جبري

المفردات : قسمة ، حد جبري

(3–4–1) قسمة حد جبري على حد جبري

تعلمت سابقا قسمة الاسس (عند القسمة نطرح الاسس بشرط تشابه الاساس $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$) اذ ان a عدد حقيقي وان لا يكون المقام صفرا اما في هذا الدرس سوف ندرس قسمة المقادير الجبرية اي حد جبري على حد جبري اي اقسم معامل الحد الاول(البسط) على معامل الحد الثاني(المقام) ثم اطرح الاسين في كل قوتين لهما نفس الاساس .

مثال : جد ناتج القسمة لكل مما يأتي

$$1)\ \frac{24x^5}{12x^3} = \frac{2x^2}{1} = 2x^2$$

$$2)\ \frac{36z^2w^2}{9zw}=\frac{4zw}{1}=4zw$$

$$3)\ \frac{81g^3h^3}{3g^{-6}h^{-6}}=\frac{27g^{3+6}h^{3+6}}{1}=27g^9h^9$$

$$4)\ \frac{\sqrt[3]{27}m^5n^5}{\sqrt[3]{8}m^{-5}n^{-5}}=\frac{3m^{5+5}n^{5+5}}{2}=\frac{3m^{10}n^{10}}{2}$$

$$5)\ \frac{28x^4y^2z^2}{\frac{1}{4}x^3}=\frac{28x^{4-3}y^2z^2}{1}\times\frac{4}{1}=112x^1y^2z^2$$

مثال : في العاب الاسهم ينطلق السهم افقيا بحسب القانون $x=\frac{5h^2n}{h}$ اذا ان x يمثل سرعة السهم ويرمز h الى ارتفاع السهم بالامتار ويرمز n الى الزمن بالثواني جد سرعة السهم اذا كانت قيمة $n=2$ و $h=5$

الحل :

$$x=\frac{5h^2n}{h}=5hn$$

نعوض قيمة $n=2$ و $h=5$ في القانون

$$x=5(5)(2)=50m\backslash s$$

(3-4-2) قسمة مقدار جبري على حد جبري

تعلمت في البند السابق قسمة حد جبري على حد جبري اما في هذا الدرس سوف نتعلم قسمة مقدار جبري على حد جبري اذ ان المقام لا يساوي صفر اي طريقة تجزئة الكسور .

مثال : جد ناتج القسمة لكل ما يأتي

$$1)\ \frac{5x^2y^2-15x^4y^2+x^5y^3}{5x^3y^3}=\frac{5x^2y^2}{5x^3y^3}-\frac{15x^4y^2}{5x^3y^3}+\frac{x^5y^3}{5x^3y^3}=\frac{1}{xy}-\frac{3xy}{y}+\frac{x^2}{5}$$

$$2)\ \frac{72z^5w^3+36z^3w^2+18z^2w^2}{9z^4w^4}$$

$$=\frac{72z^5w^3}{9z^4w^4}+\frac{36z^3w^2}{9z^4w^4}+\frac{18z^2w^2}{9z^4w^4}=\frac{8}{zw}+\frac{4}{zw^2}+\frac{2}{z^2w^2}$$

$$3)\ \frac{16m^6n^6-32m^7n^6-4m^4n^4}{4m^3n^3}=\frac{16m^6n^6}{4m^3n^3}-\frac{32m^7n^6}{4m^3n^3}-\frac{4m^4n^4}{4m^3n^3}$$

$$= \frac{4m^3n^3}{1} - \frac{8m^4n^3}{1} - \frac{mn}{1} = 4m^3n^3 - 8m^4n^3 - mn$$

مثال : في الشكل المجاور اذا كانت قاعدة المثلث 2xy ومساحته $x^2 - xy + y^2$ جد ارتفاعه بالامتار ؟

الحل : مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}\, b\, h$$

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(2xy)h$$

$$x^2 - xy + y^2 = xy\, h$$

$$h = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} - \frac{xy}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{1}{1} + \frac{y}{x}$$

(3–5) تحليل المقادير الجبرية

فكرة الدرس :

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الاكبر

تحليل المقدار الجبري باستعمال الفرق بين مربعين

تحليل المقدار الجبري باستعمال الفرق بين مقدارين مربعين

المفردات :

العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ، الفرق بين مقدارين مربعين

(3–5–1) تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك

تعلمت سابقا ضرب حد جبري في مقدار جبري وضرب مقدار جبري في مقدار جبري وفي هذا الدرس سوف تتعلم التحليل باستخراج العامل المشترك الاكبر ويرمز له (ع، م ،أ) و بالإنكليزي g, c, f وهو عكس عملية الضرب والعامل المشترك يتضمن المعامل العددي والمتغيرات المشتركة باصغر اس . في العامل المشترك نأخذ دائما العدد الذي تقبل القسمة عليه جميع الاعداد اما المتغير فنأخذ دائما الاس الاصغر

ينقسم العامل المشترك الى ثلاثة اقسام :

1– اذا كان العدد والمتغير موجود في جميع الحدود

$$10x^4 - 15x^2 = 5x^2(2x^2 - 3)$$

2– اذا كان المتغير فقط موجود اما العدد لا تقبل القسمة عليه كل الاعداد او بعضها

$$8y^5 - 7y^3 + 6y^2 = y^2(8y^3 - 7y + 6)$$

3– اذا كان العدد فقط موجود في جميع الحدود اما المتغير فغير موجود في جميع الحدود

$$6x^2 - 12x^3 - 8 = 2(3x^2 - 6x^3 - 4)$$

مثال : حلل المقدار الجبري الاتي :

$1)\ 81xy + 72x = 9x(9y + 8)$
$2)\ 7z^3 - z^2 = z^2(7z - 1)$
$3)\ 49g^2h^2 + 21gh = 7gh(7gh + 3)$
$4)\ 11m^3n^2 - 44m^2n^2 - 121mn = 11mn(m^2n - 4mn - 11)$
$5)\ 150r^3v^2 + 25rv + 75r^2v^3 = 25rv(6r^2v + 1 + 3rv^2)$

مثال : اذا كانت المساحة الكلية للشكل المجاور تعطى بالقانون $x = r^2 + \frac{1}{8}\pi r^2$ حلل المقدار x باستعمال العامل المشترك الاكبر وجد قيمة x عندما $r = 4$

الحل : نحلل القانون

$$x = r^2 + \frac{1}{8}\pi r^2$$
$$x = r^2\left(1 + \frac{1}{8}\pi\right)$$

نعوض قيمة $r=4$ في القانون

$$x = (4)^2\left(1 + \frac{1}{8}\pi\right) = 16\left(1 + \frac{1}{8}\pi\right) = 16 + \frac{16}{8}\pi = 16 + 2\pi$$

(2–5–3) تحليل المقدار الجبري باستعمال الفرق بين مربعين

تعلمت سابقا تعلمت سابقا تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الاكبر وسوف تتعلم في هذا البند التحليل باستعمال الفرق بين مربعين او الطريقتين معا

نحول المعادلات الى اقواس

$1)\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$2)\ ka^2 - kb^2 = k(a + b)(a - b)$

اشارة الحد الاول $+a^2$ نضعها للقوس الاول

اشار الحد الثاني $-b^2$ نضعها للقوس الثاني

القوس الاول (+الحد الاول a +الحد الثاني b)(+الحد الاول a – الحدالثاني b)

اي نفس المتغير بعد تحليله ونفس العدد بعد تحليله وعكس الاشارة

مثال : حلل المقدار الجبري الاتي كفرق بين مربعين :

$1)\ m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$
$2)\ 4z^2 - 9w^2 = (2z + 3w)(2z - 3w)$
$3)\ 36r^2 - 25v^2 = (6r + 5v)(6r - 5v)$

$4)\ 81g^2h^2 - 64 = (9gh + 8)(9gh - 8)$

$5)\ 50\,x^2 - 2 = 2(25x^2 - 1) = 2(5x + 1)(5x - 1)$

الفصل الرابع : المعادلات والمتباينات

(4-1) حل المعادلات من الدرجة الاولى بمتغير واحد بخطوتين في R

فكرة الدرس : حل المعادلات من الدرجة الاولى بمتغير واحد بخطوتين

المفردات : معادلة بمتغير واحد ، معادلة من درجة الاولى ،حل المعادلة ، التحقق

(4-1-1) حل المعادلات باستعمال الجمع والطرح

المعادلة من الدرجة الاولى بمتغير واحد هي المعادلة فيها متغير واحد ومن القوة واحدة .ولحل المعادلة ضع المتغير في طرف والاعداد في الطرف الاخر .

مثال) حل المعادلات التالية باستعمال الجمع والطرح :

$1)\ 2y - 12 = 2y - |-30| \ggg 3y - 2y = -30 + 12 \ggg y = -18$

$2)\ 20 + 2h = 3h - 3^2 \ggg 3h - 2h = 20 + 9 \ggg h = 29$

$3)\ 2x + 2\sqrt{3} = x - 3\sqrt{3} \ggg 2x - x = -3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \ggg x = -5\sqrt{3}$

$4)\ |-30|m = 10 - \sqrt[3]{-8}m \ggg 3m = 10 + 2m \ggg 3m - 2m = 10 \ggg m = 10$

$5)\ 5x - 8 = 4x + 8 \ggg 5x - 4x = 8 + 8 \ggg x = 16$

(4-1-2) حل المعادلات باستعمال الضرب والقسمة

$1)\ x \div 12 = 4 \ggg x = 4(12) \ggg x = 48$

$2)\ \sqrt{36}y \div 2 = |-5| \ggg 6y \div 2 = 5 \ggg 6y = 10 \ggg y = \frac{10}{6} \ggg y = \frac{5}{3}$

$3)\ 5y + 7 = 3y - 2^3 \ggg 5y - 3y = -8 - 7 \ggg 2y = -15 \ggg y = \frac{-15}{2}$

$4)\ \sqrt{16}x - 3\sqrt{7} = \sqrt{9}x \ggg 4x - 3\sqrt{7} = 3x \ggg 4x - 3x = +3\sqrt{7} \ggg x = 3\sqrt{7}$

واجب : حل المعادلات التالية:

$1)\ 2y - 2^4 = y - 3 \ggg$

$2)\ \sqrt{49} - d = 21 - 2d \ggg$

$3)\ \sqrt[3]{8}y \div |-6| = 3^2 \ggg$

$4)\ 3h + 4\sqrt{5} = 2h + 7\sqrt{5} \ggg$

$5)2(h+5)=\sqrt{64} \ggg$

(4-2) حل المعادلات من الدرجة الاولى بمتغير واحد بعدة خطوات في R

فكرة الدرس : حل معادلة من الدرجة الاولى بمتغير واحد بعدة خطوات

المفردات : خاصية التوزيع ، خاصية التجميع

(4-2-1) حل المعادلات التي تتضمن متغيرا في احد طرفيها او كليهما

لحل المعادلان التي تحتوي متغير واحد اعزل الحد الذي يحتوي على متغير في احد طرفيها ثم اجعل معامله واحدا

باستعمال خواص الاعداد الحقيقية

مثال) حل المعادلات التالية باستعمال خواص الاعداد الحقيقية:

$1)2(z-8)+16=|-36| \ggg 2z-16+16=36 \ggg 2z=36 \ggg z=\frac{36}{2}=18$

$2)\ 4(x-5\sqrt{3})=3x-2\sqrt{3} \ggg 4x-20\sqrt{3}=3x-2\sqrt{3} \ggg 4x-3x=-2\sqrt{3}+20\sqrt{3}$
$\ggg x=18\sqrt{3}$

$3)3(y+5^2)=y+70 \ggg 3y+75=y+70 \ggg 3y-y=70-75 \ggg 2y=-5$
$\ggg y=\frac{-5}{2}$

(4-2-2) حل المعادلات التي تتضمن القيمة المطلقة

مثال) حل المعادلات الاتية :

$1)|y+9|=5 \ggg \quad y+9=-5 \ggg y=-5-9 \ggg y=-14$

او $y+9=5 \ggg y=5-9 \ggg y=-4$

مجموعة الحل {-14 , -4}

$2)|2n-7|=6 \ggg \quad 2n-7=-6 \ggg 2n=-6+7 \ggg 2n=1 \ggg n=\frac{1}{2}$

او $2n-7=6 \ggg 2n=6+7 \ggg 2n=13 \ggg n=\frac{13}{2}$

مجموعة الحل $\{-\frac{1}{2},\frac{13}{2}\}$

$3)|4y+30|=-\sqrt{49} \ggg$

اما $4y+30=-7 \ggg 4y=-7-30 \ggg 4y=-37 \ggg y=\frac{-37}{4}$

او $4y+30=7 \ggg 4y=7-30 \ggg 4y=-23 \ggg y=\frac{-23}{4}$

مجموعة الحل $\{-\frac{-37}{4},\frac{-23}{4}\}$

(4-3) حل المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد في R

فكرة الدرس : حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد في R

المفردات : معادلة من الدرجة الثانية ، خاصية الضرب الصفري

(4-3-1) حل المعادلات باستعمال الجذر التربيعي

المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد هي التي فيها اكبر قوة للمتغير هي القوة الثانية .

مثال) مساحة قاعدة البرج هو $36m^2$ جد طول ضلع القاعدة ؟

$x^2 = 36$ اما $x = \sqrt{36} \ggg x = 6$ او $x = -\sqrt{36} \ggg x = -6$

حيث طول الضلع قاعدة 6m وقيمة 6- تهمل

مثال) حل المعادلات التالية باستعمال الجذر التربيعي :

1) $y^2 = 32 \ggg y = \sqrt{32}$ او $y = -\sqrt{32} \ggg y = 4\sqrt{2}$ او $y = -4\sqrt{2}$

2) $16z^2 = 4 \ggg z^2 = \frac{4}{16} \ggg z^2 = \frac{1}{4} \ggg z = \frac{1}{2}$ او $z = -\frac{1}{2}$

3) $t^2 - 1 = 11 \ggg t^2 = 11 + 1 \ggg t^2 = 12 \ggg t = \sqrt{12}$ او $t = -\sqrt{12}$

(4-3-2) حل المعادلات باستعمال خاصية الضرب الصفري

خاصية الضرب الصفري : اذا كان نتيجة ضرب عددين يساوي صفر ا فانه يجب ان يكون احد العددين يساوي صفرا .

مثال) حل المعادلات التالية باستعمال خاصية الضرب الصفري :

1) $(x-3)(x+5) = 0 \ggg x - 3 = 0$ او $x + 5 = 0 \gg x = 3$ او $x = -5$

2) $(t+8)(t+5) = 0 \ggg t + 8 = 0$ او $t + 5 = 0 \gg t = -8$ او $t = -5$

3) $(y-12)(y-9) = 0 \ggg y - 12 = 0$ او $y - 9 = 0 \gg y = 12$ او $y = 9$

4) $5z(1-z) = 0 \ggg 5z = 0$ او $1 - z = 0 \ggg z = 0$ او $z = 1$

واجب:

حل المعادلات التالية باستعمال الجذر التربيعي

1) $12z^2 = 4 \ggg$

2) $n^2 - 3 = 13 \ggg$

3) $m^2 + 7 = 43 \ggg$

حل المعادلات التالية باستعمال خاصية الضرب الصفري

1) $(y-4)(y+7) = 0 \ggg$

2) $(h-15)(h-8) = 0 \ggg$

$3)\ (x+10)(x+10)=0 \ggg$
$4)\ 3t^2-t^2=0 \ggg$

(4-4) حل المتباينات الجبرية ذات الخطوتين في R

(4-4-1) حل المتباينات الجبرية ذات الخطوتين باستعمال الجمع والطرح

تسمى المتباينة التي تحتوي على متغير او اكثر متباينة جبرية ، وكل عدد يجعل المتباينة صحيحة هو حل للمتباينة وتسمى مجموعة الحلول للمتباينة بمجموعة الحلول للمتباينة بمجموعة الحل ، ويمكن تمثيلها على مستقيم الاعداد الحقيقية ، من خواص المتباينات على الاعداد الحقيقة :

1) خاصية الجمع: $a+c \geq b+c$ 2) خاصية الطرح: $a-c \geq b-c$

مثال) حل المتباينة التالية في R باستعمال خواص جمع والطرح :

$1)\ x+14 \geq 27 \ggg x \geq 27-14 \ggg x \geq 13$
$2)\ 3x-12 \leq 2x-6 \ggg 3x-2x \leq -6+12 \ggg x \leq 6$
$3)\ 3(y-\sqrt{2}) < 2y+\sqrt{2} \ggg 3y-3\sqrt{2} < 2y-\sqrt{2} \ggg 3y-2y < \sqrt{2}+3\sqrt{2}$
$\ggg y < 4\sqrt{2}$
$4)\ 5t+\sqrt[3]{-8} \geq 6t-\sqrt[3]{27} \ggg 5t-2 \geq 6t-3 \ggg 6t-5t \geq 3-2 \ggg t \geq 1$

(4-4-2) حل المتباينات الجبرية ذات الخطوتين باستعمال اضرب والقسمة:

مثال) حل المتباينات التالية في R باستعمال خواص الضرب والقسمة :

$1)\ 18x-10 \geq 98 \ggg 18x \geq 98+10 \ggg 18x \geq 108 \ggg x \geq 6$
$2)\ \frac{6}{-2}y < 3 \ggg \frac{6}{-2}y \times \frac{-2}{6} < 3 \times \frac{-2}{6} \ggg y < -1$
$3)\ 6z > 3(z-6) \ggg 6z < 3z-18 \ggg 6z-3z < -18 \ggg 3z < -18$
$\ggg z < -6$
$4)\ \frac{5}{-9} \leq \frac{k}{3} \ggg \frac{5}{-9} \times 9 \leq \frac{k}{3} \times 9 \ggg -5 \leq 3k \ggg k \geq \frac{-5}{3}$

واجب :

حل المتباينة التالية في R باستعمال خواص جمع والطرح :

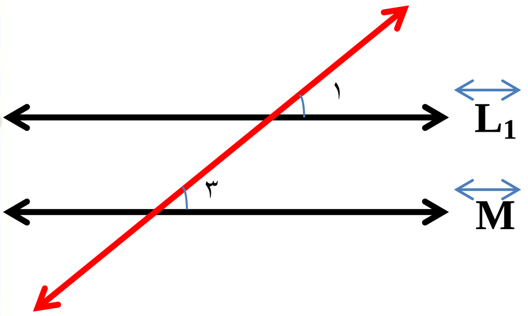
$1)\ 2x-6 < x-\sqrt{16} \ggg$
$2)\ 2y-8 \leq 3y-8 \ggg$
$3)\ 7(x-\sqrt{3}) < 6x+\sqrt{3} \ggg$

حل المتباينات التالية في R باستعمال خواص الضرب والقسمة :

$1)\ 6(x-\sqrt{3}) \geq 4x-\sqrt{3} \ggg$
$2)\ \frac{3}{4}t \geq \frac{5}{7} \ggg$
$3)\ 5(v+\sqrt{7}) > 2v-\sqrt{7} \ggg$

الفصل الخامس : الهندسة والقياس
Geometry and Measurement

مثال 1/ استعمل المعطيات في الشكل المجاور :



اذا $m < 1 = m < 2$ بين ان $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{M}$

$m\angle 1 = m\angle 2$ (معطى)

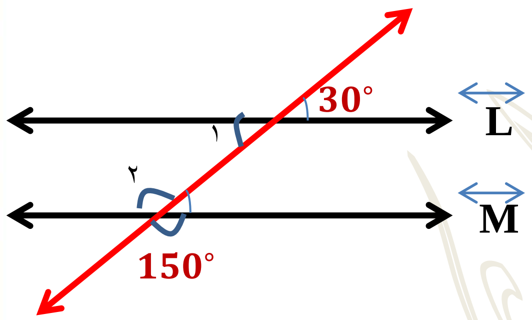
زاويتان متقابلتان بالرأس $m\angle 2 = m\angle 3$

$m\angle 1 = m\angle 2$ (اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان)

وبما ان $\angle 3, \angle 1$ زاويتان متناظرتان فأن $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{M}$

عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة .

مثال ٢/ استعمل المعطيات في الشكل المجاور وبين ان $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{M}$



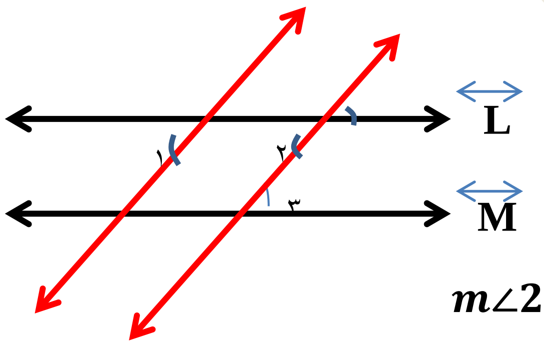
زاويتان متقابلتان بالرأس $m\angle 1 = 30°$

زاويتان متقابلتان بالرأس $m\angle 1 = 150°$

الزاويتان ٢ ، ١ داخليتان وعلى جهه واحدة من القاطع ومجموعهما

$180°$ فأن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية .

مثال ٣ / استعمل المعطيات في الشكل المجاور :



حيث $m\angle 1 = m\angle 3$ $\overleftrightarrow{K} // \overleftrightarrow{M}$ بين ان $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$

معطى $m\angle 1 = m\angle 3$

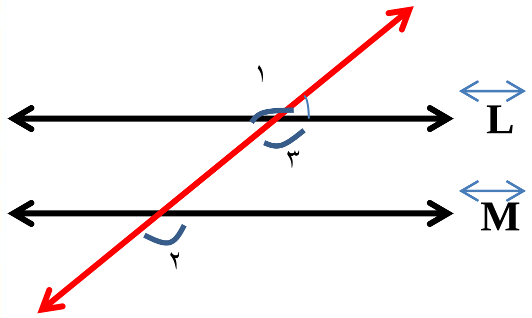
زاويتان متناظرتان $m\angle 1 = m\angle 2$

(اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان) $m\angle 2 = m\angle 3$

زاويتان متبادلتان $\angle 3, \angle 2$

اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتبادلة

تأكد من فهمك : استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين ان :



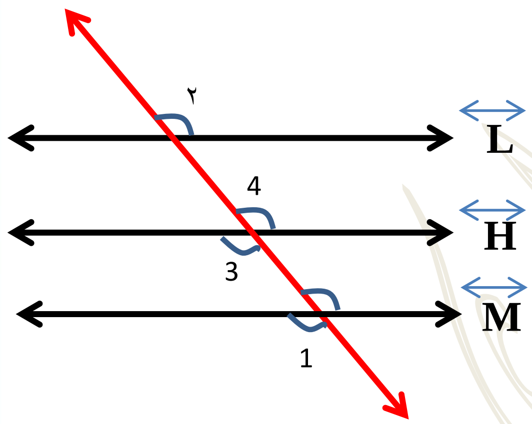
١) اذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فأن $\overleftrightarrow{M} \mathbin{//} \overleftrightarrow{L}$

$m\angle 1 = m\angle 3$ معطى و $m\angle 1 = m\angle 3$ بالتقابل بالرأس

اذن $m\angle 2 = m\angle 3$ اذ تساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان .

وبما ان $\angle 3, \angle 2$ متناظرتان فأن :

$\overleftrightarrow{M} \mathbin{//} \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة



٢) اذا كان $\overleftrightarrow{M} \mathbin{//} \overleftrightarrow{H} \mathbin{//} \overleftrightarrow{L}$ فأن $m\angle 1 = m\angle 2$

$\overleftrightarrow{M} \mathbin{//} \overleftrightarrow{H}$ معطى اذن $m\angle 1 = m\angle 2$ زاويتان متناظرتان

$m\angle 3 = m\angle 4$ زاويتان متقابلتان بالرأس

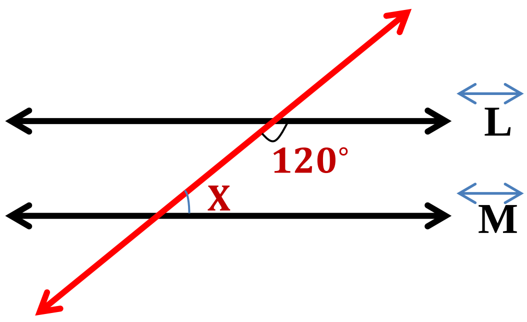
اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتان متقابلتان بالرأس متساويتان بالقياس

$m\angle 1 = m\angle 4$ اذا تساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان .

$m\angle 4 = m\angle 2$ زاويتان متناظرتان

اذن $m\angle 1 = m\angle 4$ اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان

٣) اذا كان $a = 4$, $x = 15a$ فأن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$



بما ان a = 4 معطى فأن $x = 15(4) = 60°$

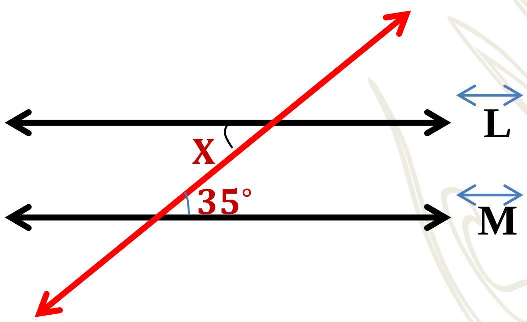
$60° + 120° = 180°$

(وهما زاويتان متكاملتان وعلى جهه واحدة من القاطع)

اذن $\overleftrightarrow{M} // \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية .

تدرب وحل التمرينات: استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين ان $\overleftrightarrow{M} // \overleftrightarrow{L}$

٤) a = 5 ، x = 7a

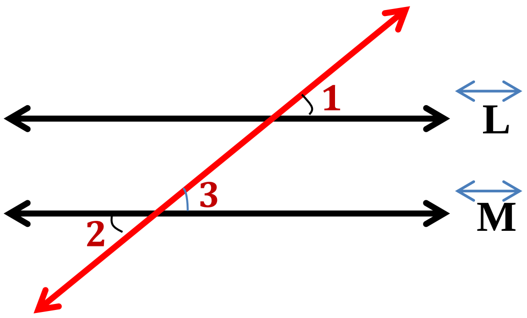


نجد قياس زاوية x حيث a = 5 معطى

اذن $x = 7(5) = 35°$ وبما ان الزاويتان متبادلتان

اذن $\overleftrightarrow{M} // \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا المتبادلة

٥) $m\angle 1 = m\angle 2$



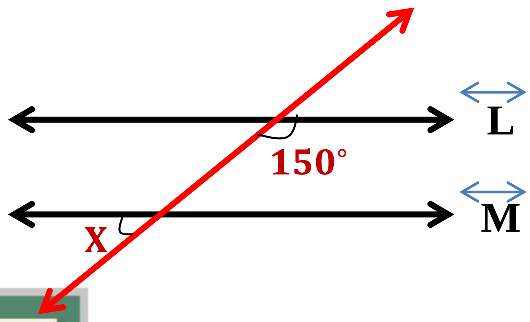
زاويتان متقابلتان بالرأس $m\angle 2 = m\angle 3$

معطى $m\angle 1 = m\angle 2$

اذن $m\angle 1 = m\angle 3$ اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان.

اذن $\overleftrightarrow{M} // \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة .

٦) $m\angle x = 30°$



زاويتان متقابلتان بالرأس $m\angle 1 = m\angle x$

اذن $m\angle x = 30°$

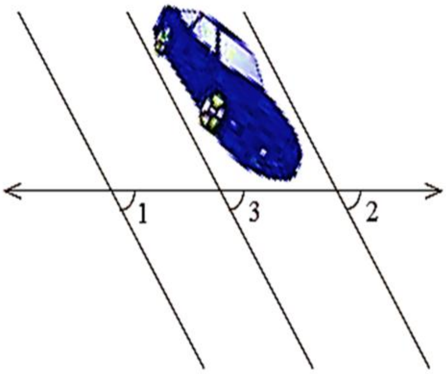
$30 + 150 = 180°$ وهما زاويتان داخليتان متكاملتان على جهه واحدة من القاطع

∴ $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية

تدرب وحل مسائل حياتية :

٧) موقف سيارات : أراد مهندس تخطيط موقف للسيارات بصورة متوازية.

استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين ان :



$\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ حيث $m\angle 2 = m\angle 1$ وان $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{H}$

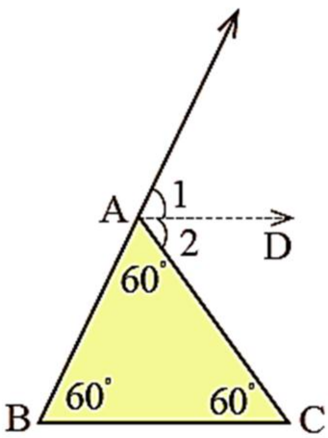
$\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{H}$ معطى فأن :

$m\angle 3 = m\angle 1$ (اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فكل زاويتان متناظرتان متساويتان بالقياس)

$m\angle 3 = m\angle 1$ معطى فأن $m\angle 3 = m\angle 2$ (اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان)

$m\angle 2, \angle m3$ زاويتان متناظرتان فأن $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة .

٨) رسم : رسم محمد المثلث المتساوي الاضلاع كما في الشكل المجاور اذ $m\angle 2 = m\angle 1$ ساعد محمد في اثبات ان $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$



وبما ان المثلث ABC متساوي الاضلاع فأن قياس كل زاوية منه °٦٠

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180 - 60 = 120$ (الزاوية المستقيمة قياسها °180)

$m\angle 1 + m\angle 2$ معطى

اذن $m\angle 1 = \frac{120}{2} = 60°$

اذن $m\angle 1 = m\angle B = 60°$ وهما زاويتان متناظرتان

اذن $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة

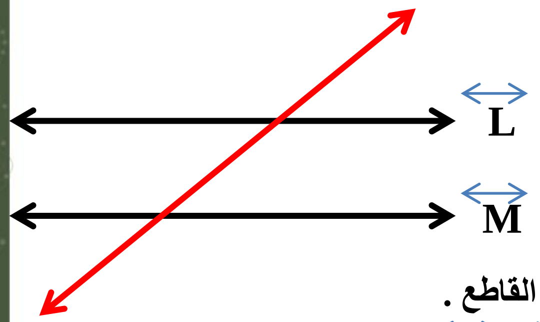
فكر ١١) تحدَّ : في الرسم المقابل $\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{H}$ $m\angle 1 = m\angle 2$ برهن $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$

$\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{H}$ اذن $m\angle 1 = 40°$ لأنهما زاويتان متناظرتان .

وبنا ان $m\angle 1 + m\angle 2$ معطى فأن $m\angle 1 = 40°$

لذلك $180^\circ = 140^\circ + 40^\circ$ وهما مجموع قياس الزاويتان الداخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع .

اذن $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية وعلى جهة واحدة.



١٣) صحح الخطأ : رسم مهند الشكل المجاور وقال بما ان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ اذن $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$ ؟

اكتشف الخطأ وصححه ؟

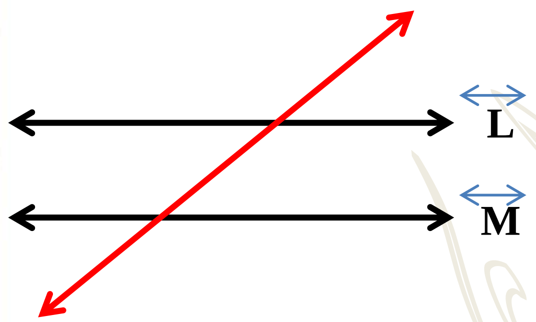
$\angle 1, \angle 2$ زاويتان متقابلتان

وفي حالة مجموعهما $180°$ لا يمكن ان يكون $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$

لذلك فأن جواية خطأ والصحيح هو :

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ وهما زاويتان داخليتان وعلى جهه واحدة من القاطع .

اكتب : هل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور تسمح لك ان تستنتج ان $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$ ؟ وضح ذلك .



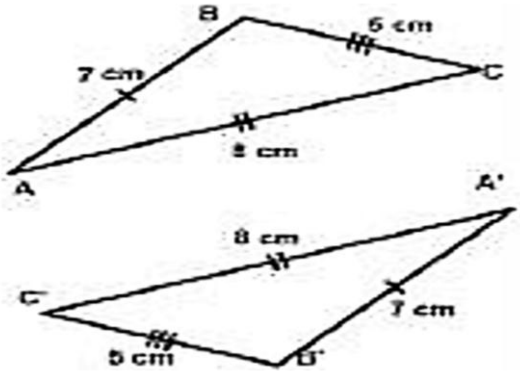
$m\angle 1 = 45°$ لأنها متقابلة مع زاوية $45°$

وان $\angle 1$ والزاوية التي قياسها $135°$ داخليتان وعلى جهه واحدة من القاطع لذلك

$135° + 45° = 180°$ متكاملتان وهما زاويتان داخليتان وعلى جهه واحدة من القاطع.

اذن $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية .

الدرس الثاني : تطابق المثلثات Congruent Triangles



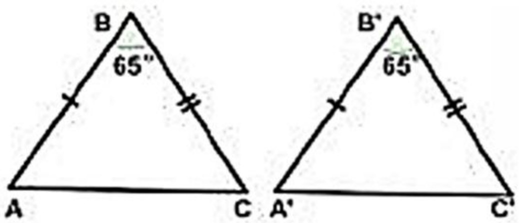
مثال ١ في الشكل المجاور

الضلع AB ينطبق على الضلع $\overline{A'B'}$ $(\overline{AB} \cong \overline{A'B'})$

الضلع AC ينطبق على الضلع $\overline{A'C'}$ $(\overline{AC} \cong \overline{A'C'})$

الضلع BC ينطبق على الضلع $\overline{B'C'}$ $(\overline{BC} \cong \overline{B'C'})$

الحالة الثانية : تطابق ضلعين والزاوية المحددة بينهما يتطابق AA بينهما مع نظائرهما من المثلث الآخر (ض ز ض)



مثال ٢ في الشكل المجاور

الضلع AB ينطبق على الضلع $\overline{A'B'}$ $(\overline{AB} \cong \overline{A'B'})$

الضلع AC ينطبق على الضلع $\overline{B'C'}$ $(\overline{BC} \cong \overline{B'C'})$

الزاوية ABC تنطبق على الزاوية $A'B'C'$ $(\angle ABC \cong \angle A'B'C')$ أي ان

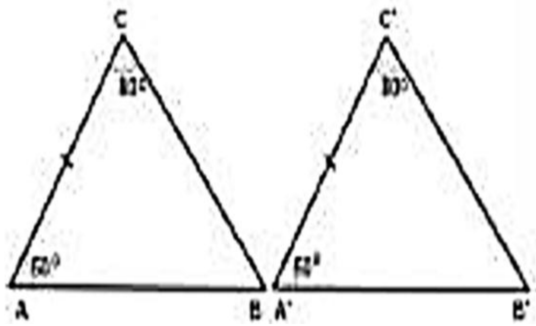
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ **(ض ز ض)**

الحالة الثالثة : (تطابق زاويتين والضلع المحدد بينهما) يتطابق المثلثان اذا تطابقت زاويتان والضلع المحدد بينهما (الواصل بينهما) مع نظائرهما من المثلث الآخر (ز ض ز)

مثال ٣ / في الشكل المجاور

- الزاوية **BAC** تنطبق على الزاوية $B'A'C'$ $(\angle BAC \cong \angle B'A'C')$
- الزاوية **ACB** تنطبق على الزاوية $A'C'B'$ $(\angle ACB \cong \angle A'C'B')$
- الضلع $\overline{AC}$ ينطبق على الضلع $\overline{A'C'}$ $(\overline{AC} \cong \overline{A'C'})$

أي ان $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ (ز ض ز)

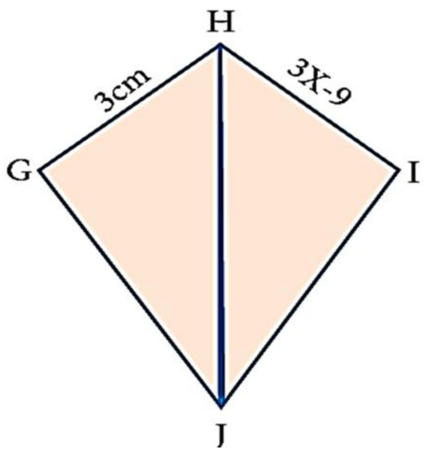


.: حالات تطابق مثلثين:

١- (ض . ض . ض) ثلاثة اضلاع.
٢- (ض ز ض) ضلعان والزاوية المحددة بهما.
٣- (ز ض ز) زاويتان والضلع المحدد بهما.

مثال ٤ / في الشكل المجاور

- جد قيمة x التي تجعل $\Delta GHJ \cong \Delta IHJ$
- اذا كان قياس $\angle HIJ$ يساوي $^\circ$٨٧ فما قياس $\angle HGJ$؟
- اذا كان قياس $\angle HIH$ يساوي 30° فما قياس $\angle HJG$؟



$3x - 9 = 3$ من خواص التطابق (تساوي الأضلاع المتناظرة)

$3x = ٣ + ٩$ علاقة الجمع بالطرح

$3x = ١٢$ تبسيط ← $x = ٤$ الناتج

$m\angle HGJ = m\angle HHJ$ من خواص التطابق (تساوي الزوايا المتناظرة)

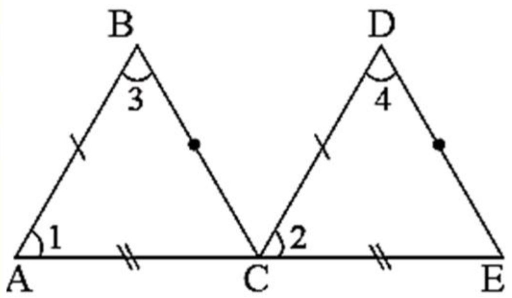
اذن $m\angle HGJ = ٨٧°$ بالتعويض

$m\angle IJH = m\angle HJG$ من خواص التطابق (تساوي الزوايا المتناظرة)

اذن $m\angle HGJ = ٣٠°$ بالتعويض

تأكَّدْ من فهمِكَ

١) لاحظ الشكل المجاور أذا المثلثان $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ متطابقان



حالة التطابق	العناصر المتطابقة
ز ض ز الحالة الثالثة	$m\angle1 = m\angle2, m\angle3 = m\angle4$ $AB = CD$
ض ز ض الحالة الثانية	$m\angle1 = m\angle2, AB = CD$ $AC = CE$
ض ض ض الحالة الاولى	$AB = CD, AC = CE$ $BC = DE$

٢) جِدْ قيمة X,Y ,Z المؤشرة في الشكل المجاور أذا المثلثان متطابقان.

بما ان المثلثان متطابقان (معطى)

يعني ان الزوايا المتناظرة والاضلاع المتناظرة متطابقة ومتساوية بالقياس . لذلك :

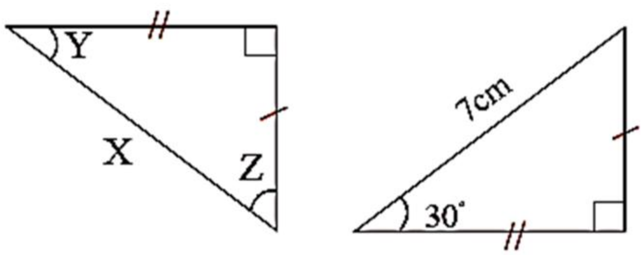
من خواص التطابق $x = 7$

نفس السبب $m\angle y = 30^\circ$

مجموع زوايا المثلث $z = 180^\circ - (90 + 30)$

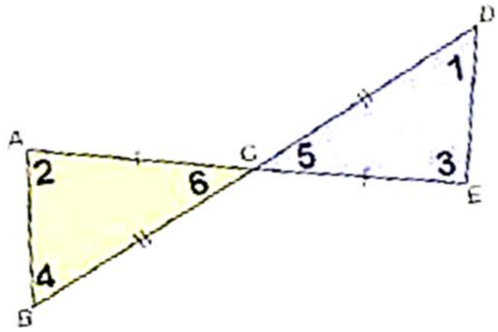
والمثلثان كل منهما قائم الزاوية

$\therefore\ z = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



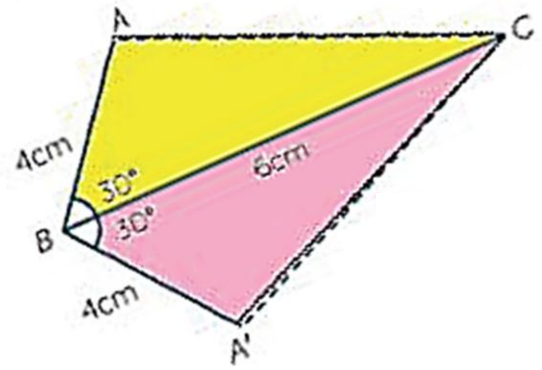
تدرب وحل التمرينات

٣) لاحظ الشكل المجاور $\Delta\ ABC \cong \Delta\ CED, \overline{AB} // \overline{DE}$



حالة التطابق	العناصر المتطابقة
ضلعان وزاوية محددة بينهما	$\overline{CD} = \overline{CB}, \overline{AC} = \overline{CE}$ $m\angle6 = m\angle5$
زاويتان وضلع محدد بينهما	$m\angle1 = m\angle4, m\angle5 = m\angle6$ $\overline{CD} = \overline{CB}$
ثلاث اضلاع	$\overline{DE} = \overline{AB}, \overline{CD} = \overline{CB}$ $\overline{CE} = \overline{CA}$

٤) انظر الى المثلثين $ABC, A'BC$ في الشكل المجاور ثم اكتب بالرموز اسماء الزاويتين المتطابقتين والضلعين المتساويين ثم عبر عن التطابق بالصورة الرمزية وبين نوع التطابق.



قياس كل منهما $m\angle ABC = m\angle A'BC\ 30°$

قياس كل منهما $AB = A'B 4\text{cm}$

مشترك BC

(ض ز ض) $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$

تدرب وحل مسائل حياتية:

بناء : انظر إلى الشكل المجاور للنافذتين:

٥) كم مثلثاً متطابقاً تستطيع أن تحصي؟ ١٧ مثلثاً

٦) اي نوع من التطابق بين المثلثات الموجودة فيها؟

ثلاثة اضلاع (ض ض ض)

تسلية: النظر إلى المثلثين في الشكل المجاور

٧) ما نوع التطابق بين المثلثين؟

ضلعين والزاوية المحددة بينهما (ض ز ض)

٨) حاول (عملياً) باستخدام نفس الاسلوب اظهار بقية حالات التطابق. لوطبقنا المثلثين احداهما على الآخر نلاحظ ان الاضلاع تتطابق (ض ض ض) وكذلك زاويتين والضلع المحدد بينهما (زض)

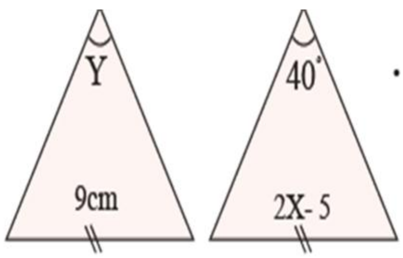
٩) حديقة : حديقة ازهار قسمت كما هو موضح بالشكل المجاور.

اثبت أن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

$BC = AD$ ضلعان متقابلان في مستطيل و $DC = DC$ مشترك

$\angle D = \angle C = ١٠^{\circ}$ لذا فأن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

١٠) هندسة : من المثلثين المتطابقين المتجاورين جد قيمة x , y



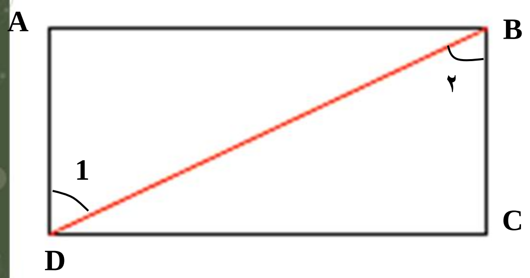
من التطابق $m\angle y = 40° \Leftarrow y = 40°$

من التطابق $2x-5=9 \Leftarrow 2x=5+9 \Leftarrow 2x=14 \Leftarrow x=7$

فَكِّــــــرْ

١١) تحدًّ : هل يتطابق المثلثان القائما الزاوية اللذان يتساوى طولا وترٍ وأحدُ الضلعين القائمين في احدهما مع نظيريهما من المثلث الاخر؟ فسر أجابتك .

الجواب : نعم وتصير حالة رابعة من التطابق حيث تعتبر الشكل الناتج مستطيل

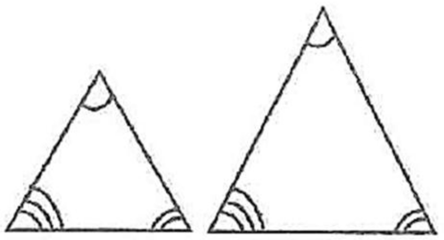


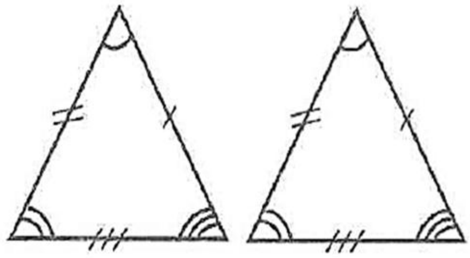
(وتر ضلع قائم وتر). $m\angle 1 = m\angle 2$ (متبادلة)

(وتر ضلع مشترك) AD = BC, DB ضلعان متقابلان متساويان

اذن يتطابق المثلثين ABD , BCD (ض ز ض)

١٢) مسألة مفتوحة: وضح ما الفرق بين تطابق مثلثين وتشابه مثلثين؟


مثلثان متشابهان


مثلثان متطابقان

التطابق هو تساوي قياسات العناصر الستة الاضلاع والزوايا) من المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني. أما التشابه فهو تطابق الزوايا المتناظرة لكن الاضلاع المتناظرة تكون متباينة.

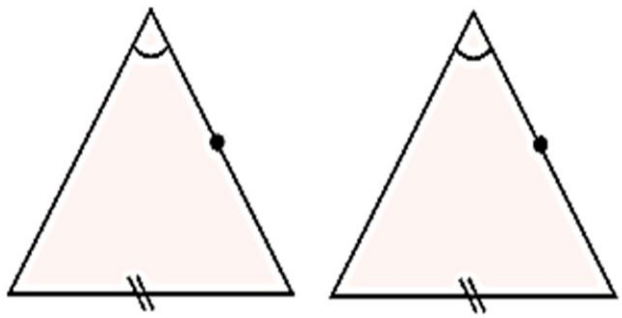
١٣) حس عددي: اذا رسمنا قطر المستطيل تكون لدينا مثلثان ؟ هل المثلثان متطابقان ؟ لماذا؟

الجواب: نعم يكون المثلثان متطابقان حسب الحالة الرابعة

(زاوية قائمة وتر ضلع قائم).

١٤) اصحح الخطأ: قالت تمارة ان المثلثين كما مبين في الشكل ادناه متطابقان بين خطأ تمارة وصححه ؟

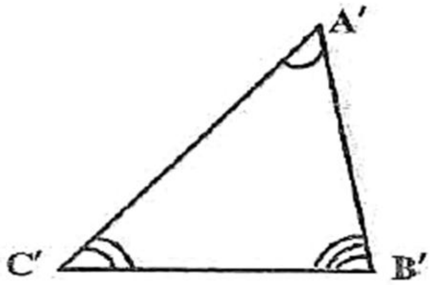
الخطأ ليس من الضروري متطابقان لأنها لا تنطبق على أي حالة من حالات التطابق. والصحيح يتطابق المثلثان في حالة تطابق ضلعان والزاوية المحددة بين الضلعين.

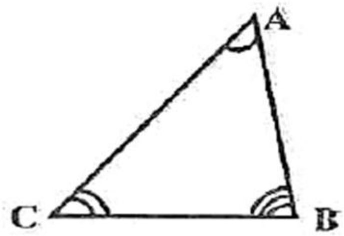


اكتب: الحالات التي لا يتطابق بها المثلثين واعط أمثلة توضيحية لها مع الرسم.

اذا لم تنطبق في حالة من الحالات الاربعة (حالات التطابق) على مثلثين فأنها لا تتطابق لكن اذا انطبقت اي حالة منها تقول المثلثين متطابقين ومثال على ذلك في المثلثين ABC, ABC فيهما:

$m\angle C = m\angle C', m\angle B = m\angle B', \angle A = m\angle A'$ فأن المثلثان غير متطابقين لكنهما متشابهان.





الدرس الثالث: خواص المثلثات (متساوي الساقين ، متساوي الأضلاع ، قائم الزاوية)
Properties of Triangles (Isosceles triangle, Equilateral triangle,]Right-angled triangle)

فِكْرَةُ الدرسِ: التعرف الى خواص المثلثات (متساوي الساقين – متساوي – الاضلاع ، قائم الزاوية)

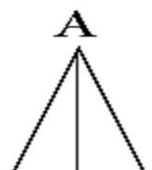
المفردات : قاعدة المثلث ـ زاوية الرأس ـ ارتفاع المثلث.

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.
تعلم: يمكن تصنيف المثلثات تبعاً لأطوال اضلاعها الى:
١ ـ مثلث متساوي الساقين ٢ ـ مثلث متساوي الاضلاع سنقوم بالتعرف على خواص كل منها بالتفصيل.

تعلمت سابقاً انواع المثلثات حسب اطوال اضلاعها وبحسب قياس زواياها وفي هذا الدرس سنتعرف الى خواص مثلث متساوي الساقين ومتساوي الاضلاع ومثلث قائم الزاوية.

ـ خواص المثلث المتساوي الساقين : Properties of isosceles triangles

وهو مثلث فيه ضلعان متساويان ويسمى الضلع الثالث المختلف بالطول عن الضلعين المتساويين بقاعدة المثلث كما تسمى النقطة المقابلة لقاعدة المثلث برأس المثلث. اما خواصه فهي:

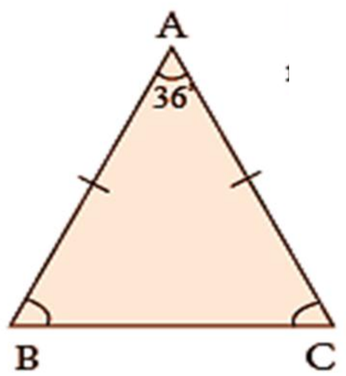


١) تتساوى قياس زاويتا القاعدة المقابلتين للضلعين المتساويين $m\angle B = m\angle C$

٢) أي مثلث فيه زاويتان متساويتان يكون المثلث متساوي الساقين.

٣) منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة وينصفها. $BD = DC, \overline{AD} \perp \overline{BC}$

مثال ١ / في الشكل المجاور إذا كان قياس $BAC = 36°$ ، و كان المثلث ABC متساوي الساقين ، جد قياس الزاوية ABC .



$m\angle ABC = m\angle ACB = x$ ($AB = AC$ مثلث متساوي الساقين)

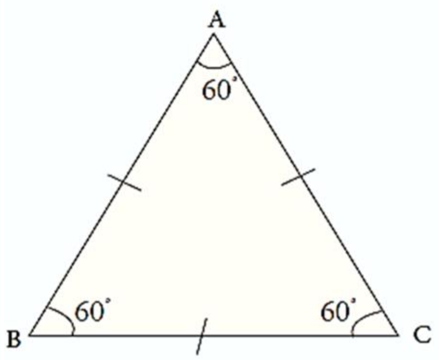
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ (مجموع زوايا المثلث تساوي $180°$)

بالتعويض عن A $36° + x + x = 180°$

الجمع بالطرح $36° + 2x = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 36$

$\therefore 2x = 144 \Rightarrow x = \frac{144°}{2} = 72°$

خواص المثلث المتساوي الأضلاع Properties of Equatorial Triangle :



وهو مثلث تكون أضلاعهُ الثلاثة متساوية بالقياس و يمكن تسميته ايضاً (المثلث المنتظم) و خواصه هي :

١) تكون جميع زواياه متساوية بالقياس و قياس كل زاوية $= 60°$.

٢) اي مثلث تكون جميع زواياه متساوية بالقياس تتساوى قياسات جميع اضلاعهُ .

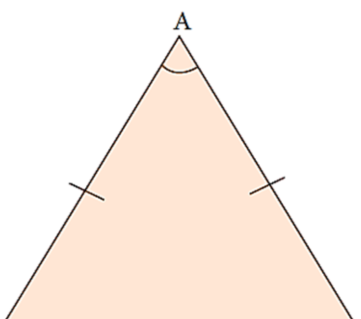
و بالعكس $AB = BC = CA \Rightarrow m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$

مثال ٢ / في الشكل المجاور مثلث متساوي الأضلاع محيطه ٥٧ من السنتمترات جد طول كل ضلع ثم جد قيمة x

طول الضلع $= \frac{\text{محيط المثلث متساوي الاضلاع}}{3} = \frac{57}{3} = 19$

و لإيجاد قيمة X :

معادلة السؤال $2x - 1 = 19$



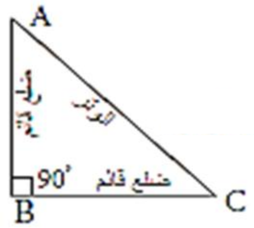
علاقة الجمع بالطرح $2x = 19 + 1$

بقسمة الطرفين على 2 $\quad 2x = 20$

$$x = \frac{20}{2} = 10\ cm$$

خواص المثلث القائم الزاوية Properties of Right – Angle Triangles :

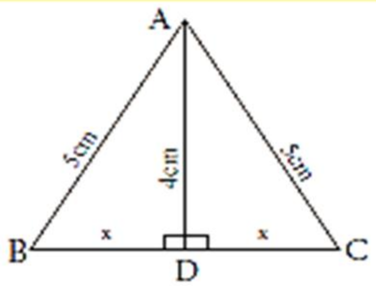
هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متعامدان (الزاوية المحصورة بينهما قائمة قياسها $90°$) نسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة بـ (الوتر) و هو اطول اضلاع المثلث ، كما نسمي الضلعين الأخرين بالضلعين القائمين .



و خواصه هي :

نطبق عليه نظرية فيثاغورس حيث ان مجموع مربع طول كل من الضلعين القائمين يساوي مربع طول الوتر . ونعبر عن هذا بالصيغة الرياضية :

(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$



مثال ٣ / استعمل الشكل المجاور وجد طول $\overline{BC}$.

المعطيات : المثلث ABC متساوي الساقين فأن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

مبرهنة فيثاغورس $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$

بالتعويض $5^2 = 4^2 + x^2$

بالتبسيط $٢٥ = ١٦ + x^2$

علاقة الجمع بالطرح ، والجذر التربيعي للطرفين $x^2 = 25 - 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\ cm$

و من المعطيات نجد ان طول الضلع $\overline{BC}$ يساوي ٦ cm (من خواص المثلث المتساوي الساقين)

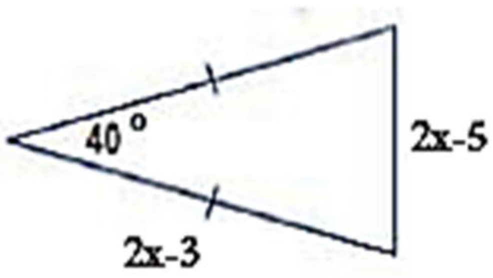
تأكد من فهمك :

١) في المثلث المتساوي الساقين المجاور اذا علمت أن المحيط ١٩ cm . جد قيمة x وطول كل ضلع وقياس الزاويتين الباقيتين .

ملاحظة : تم تعديل القيمة 2x–5 الى 2x–2 لتكون القياسات متناسبة .

$$(2x + 3) + (2x + 3) + (2x - 2) = 19$$

$$6x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$$



طول كل ضلعيهِ $2x + 3 = 2\left(2\frac{1}{2}\right) + 3 = 8$

طول القاعدة $2x+2=2\left(2\frac{1}{2}\right)-2=5-2=3$

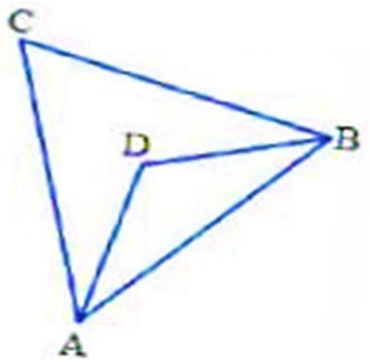
وبما ان المثلث متساوي الساقين فأن $m\angle 1=m\angle 2$

لأن مجموع زوايا المثلث $180°$ $\quad m\angle 1+m\angle 2=180°-40°=140°$

$$m\angle 1=m\angle 2=\frac{140}{2}=70°$$

٢) المثلث ABC متساوي الأضلاع $\overline{BD}$ ، $\overline{AD}$ منصفان للزاويتين CAB ، CBA جد قياس زاوية ADB .

بما ان المثلث متساوي الاضلاع فأن قياس كل زاوية من زواياه = $60°$.



و بما ان $\overline{AD}$ منصف قياس زاوية A فأن :

$$m\angle DAB=\frac{60°}{2}=30°$$

و بما ان $\overline{BD}$ منصف قياس زاوية B فأن :

$$m\angle DBA=\frac{60°}{2}=30°$$

مجموع زوايا المثلث $\quad m\angle ADB+m\angle DAB+m\angle DBA=180°$

بالتعويض $\quad m\angle ADB+30°+30°=180°$

$$m\angle ADB=180°-30°-30°=120°$$

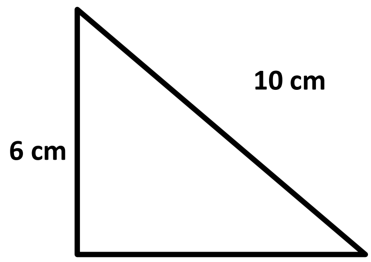
٣) مثلث اطوال اضلاعه ٦ cm ، ١٠ cm ، ٨ cm هل المثلث قائم الزاوية ؟ و ضح ذلك مع الرسم .

في هذه الحالة نختار اطول الاضلاع و هو الذي يمثل الوتر ونربعهُ $(١٠)^{٢}$ = ١٠٠ ثم نربع طول كل من الضلعين الآخرين $(٦)^{٢}$ = ٣٦ ، $(٨)^{٢}$ = ٦٤ .

ثم نلاحظ هل ان مربع اطوال الاضلاع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فأذا كان الجواب صحيح فأن المثلث قائم الزاوية و اذا لا فالمثلث ليس قائم الزاوية .

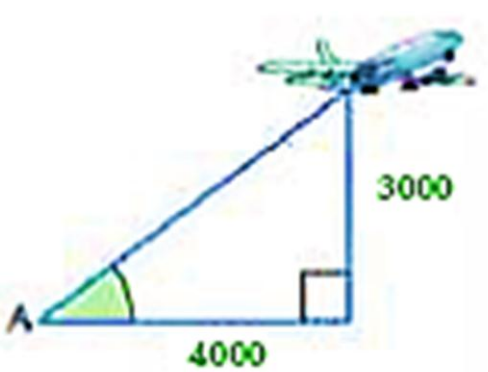
100 = 64 + 36

ففي هذه الحالة ان المثلث قائم الزاوية



تدرب وحل مسائل حياتية :

٦) بناء في الشكل التوضيحي المجاور جد المسافة بالأمتار بين الطائرة و النقطة A .



أفرض المسافة = x والشكل هو مثلث قائم الزاوية

نستخدم مبرهنة فيثاغورس $x^2 = (٣٠٠٠)^٢ + (٤٠٠٠)^٢$

$x^2 = 9000000 + 16000000$

$x = 25000000 \Rightarrow x = \sqrt{25000000} = 5000$

∴ المسافة بين الطائرة و النقطة A ٥٠٠٠ متر .

٧) جد قيمة x في الشكل المجاور اذا علمت ان طول السلم ١٣ m

الشكل المتكون هو مثلث قائم الزاوية فيه طول الوتر (السلم) معلوم وطول أحد الضلعين (بعد القاعدة للسلم عن الجدار) معلوم لذلك من الممكن استخدام مبرهنة فيثاغورس .

مبرهنة فيثاغورس $(٥)^٢ + (x)^٢ = (١٣)^٢$

علاقة الجمع بالطرح $٢٥ + x^2 = ١٦٩$

تبسيط $١٦٩ - ٢٥ = x^2 \rightarrow x^2 = ١٤٤$

استخدم الجذر التربيعي $x = \sqrt{144} = 12m$

٨) في القارب الشراعي الواضح بالشكل المجاور استخرج ارتفاع الجزء الأخضر بين الشراع ثم أحسب مساحته .

الجزء الأخضر من الشراع هو عبارة عن مثلث قائم الزاوية فيه الوتر معلوم m ١٠ وطول القاعدة (أحد الضلعين القائمين) m ١٠

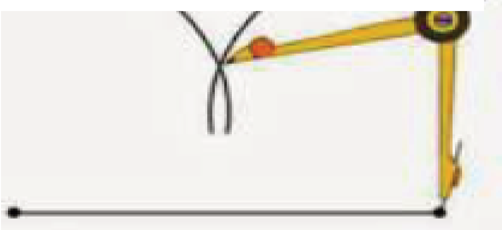
نطبق مبرهنة فيثاغورس وليكن الارتفاع h فأن :

$(10)^2 = h^2 + (6)^2$

ارتفاع الشراع $100 - 36 = h^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8\ m$

مساحة الشراع (المثلث) = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8\ m = 24\ m^2$$



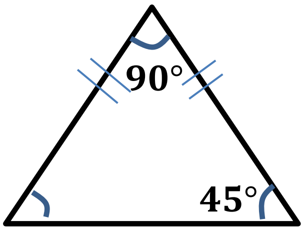
فكر : ٩) تحدٍّ : بأستخدام الفرجال والمسطرة حاول ان ترسم مثلثاً متساوي الاضلاع طول ضلعه cm ٤ (انظر للصورة فأستنتج الطريقة) .

الحل / ارسم مستقيماً على المستوي طوله معلوم ثم ثبت الفرجال الرأسي المدبب على أحد طرفيه وافتح الفرجال بقدر طول قطعة المستقيم ثم حركة لترسم قوساً اعلى قطعة المستقيم ثم غير وضع الرأس المدبب على الطرف الآخر من قطعة المستقيم و ارسم قوساً يتقاطع مع القوس الأول فتكون نقطة معينة ولتكن A ثم وصل بين طرفي قطعة المستقيم و النقطة A لتحصل على مثلث متساوي الأضلاع .

١٠) مسألة مفتوحة : ما قياس كل زاوية في مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين وضح اجابتك بالرسم .

بما ان مجموع زوايا المثلث $180°$ وهو قائم الزاوية يعني احدى زواياه $90°$.

لذلك $90° = 90° - 180°$ مجموع قياس الزاويتين الآخريتين و بما ان المثلث متساوي الساقين لذلك قياس كل من زاويتي القاعدة $\frac{90°}{2} = 45°$ لذلك قياس الزوايا للمثلث القائم المتساوي الساقين هو $90°, 45°, 45°$.



١١) حسّ عدديٌّ : هل يوجد مثلث قائم الزاوية متساوي الأضلاع في آن واحد ؟ وضح اجابتك بأمثلة عددية .

المثلث القائم احدى زواياه $90°$ و تبقى مجموع الزاويتين الآخرتين $90°$ يعني كل واحدة $45°$. ونعلم ان المثلث المتساوي الاضلاع قياس كل زاوية من زواياه $60°$.

لذلك لا يوجد مثلث قائم الزاوية متساوي الأضلاع بآن واحد .

١٢) اصحح الخطأ : يدعى ان المثلث الذي اطوال اضلاعه 4 cm ، ٣ cm ، ٢ cm يمثل اضلاع مثلث قائم

الزاوية اكتشف خطأ أحمد و صححهُ .

نربع اطوال جميع الأضلاع $4 = (2)^2 , 9 = (3)^2 , 16 = (4)^2$

$$16 \neq 9 + 4 \rightarrow 16 \neq 13$$

لذلك المثلث ليس قائم الزاوية (لأن لو كان قائم الزاوية لتساوى الطرفان)

اكتب : ثلاثة مجموعات من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تنطبق عليها الصيغة الرياضية لمبرهنة فيثاغورس .

١) { 5 , 4 ,3 } $(5)^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = 16 + 9 \Rightarrow 25 = 25$

٢) { 10 , 8 ,6 } $(10)^2 = (8)^2 + (6)^2 \Rightarrow 100 = 64 + 36 \Rightarrow 100 = 100$

٣) { 15 , 12 ,9 } $(15)^2 = (12)^2 + (6)^2 \Rightarrow 225 = 144 + 81 \Rightarrow 225 = 225$

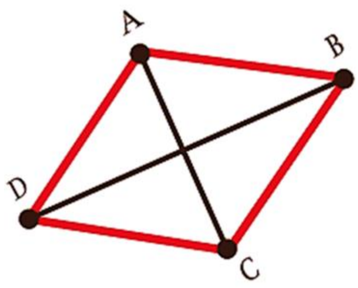
يعني نربع اطوال الأضلاع ونربع طولي كل من الضلعين الآخرين فأذا كان مربع اطول الاضلاع = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين نقول بأن هذهِ الاعداد تمثل اطوال اضلاع مثلث قائم الزاوية .

الدرس الرابع / متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف

Parallerlogram , Rhombus and Trapezoid :

فكرة الدرس : استعمل خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين وشبه المنحرف في حل المسائل الهندسية .

المفردات : متوازي الأضلاع ، المعين ، شبه المنحرف .



واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

تعلم : الشكل الهندسي المجاور ABCD يمثل متوازي الأضلاع إذ :

١) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$

٢) AB = CD , AD = BC

ويسمي المستقيم الواصل بين كل رأسين متقابلين بقطر متوازي الأضلاع $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ وهما متقاطعان ومتناصفان .

متوازي الأضلاع : parallelogram

هو شكل رباعي كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان ، والأن سوف تتعرف الى مبرهنات وخصائص متوازي الاضلاع وكيفية استعمالها في حل المسائل الهندسية .

نظريات خصائص متوازي الأضلاع .

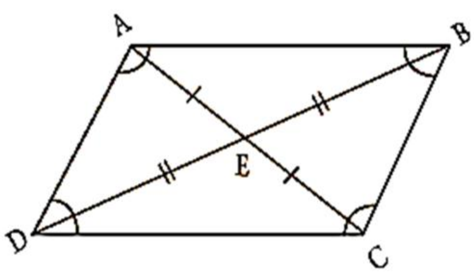
- كل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع يتطابقان $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ، AB = CD , AD = BC
- كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتان بالقياس .

$m\angle A = m\angle C , m\angle B = m\angle D$

كل زاويتين متتاليتين في متوازي الأضلاع متكاملتان

$m\angle A + m\angle D = 180^\circ , m\angle D + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle C + m\angle B = 180^\circ , m\angle B + m\angle A = 180^\circ$



- قطرا متوازي الأضلاع متناصفان AE = EC , BE = ED

المثلثان DCB , DAB متطابقان . المثلثان ADC , ABC متطابقان .
المثلثان ECD , DAB متطابقان . المثلثان EAD , EBC متطابقان .

مثال ١ / استعمل خصائص متوازي الاضلاع لإيجاد قياسات زاوية C وزاوية D بالدرجات وطول كل من الضلع AB والضلع DC بالسنتمتر من الشكل المجاور .

i) $m\angle C + m\angle D = 180°$ زاويتان متكاملتان

$2x + 5° + 4x - 35° = 180°$ بالتعويض بقيمة الزاوية

$6x - 30° = 180°$ تبسيط $\Rightarrow 6x = 180° + 30° \Rightarrow 6x = 210°$

$\therefore x = \frac{210°}{6} = 35° \Rightarrow m\angle C = 2\,(35°) + 5 = 75°$

$m\angle D = 4(35°) - 35° = 105°$

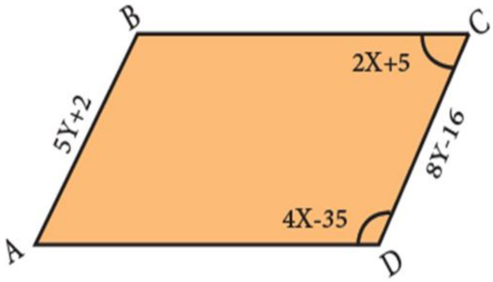
ii) $AB = DC \rightarrow 5y + 2 = 8y - 16$ ضلعان متقابلان متطابقان

$\Rightarrow 5y - 8y = -16 - 2 \Rightarrow -3y = -18$

$y = \frac{-18}{-3} \Rightarrow y = 6$

$\therefore AB = 5y + 2 = 5\,(6) + 2 = 32\ cm$

$DC = 8y - 16 = 8\,(6) - 16 = 32\ cm$

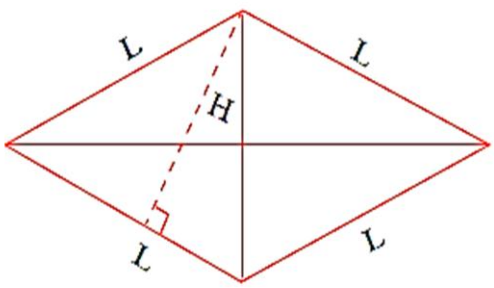


المعين Rhambus

المعين هو متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان .

نظريان خصائص المعين :

- قطرا المعين متعامدين .
- قطرا المعين كل منهما ينصف الزاويتين عند طرفيه .
- مساحة المعين = طول الضلع × الارتفاع اي $A = H \times L$



او (نصف حاصل ضرب طول كل من قطريه)

- المحيط $= 4 \times$ طول الضلع اي $\mathbf{P} = \mathbf{4} \times L$

مثال ٢ / استعمل خصائص المعين لتجد طول الضلع BC و محيط المعين :

i)$\mathbf{AD} = \mathbf{AB}$ اضلاع المعين متساوية بالطول

$$5x - 17 = 3x + 7 \Longrightarrow 5x - 3x = 7 + 7x$$

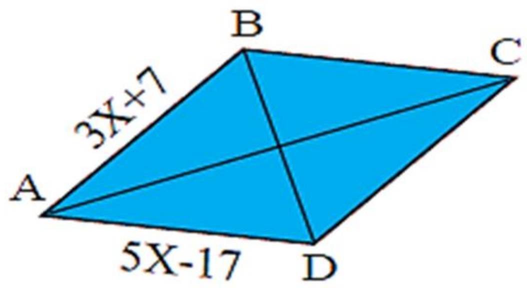
$$\Longrightarrow 2x = 24 \Longrightarrow x = \frac{24}{2} = 12$$

$$AB = AD = 5\,(12) - 7 = 43 \text{ cm}$$

ii)$\mathbf{P} = 4 \times \mathbf{L}$

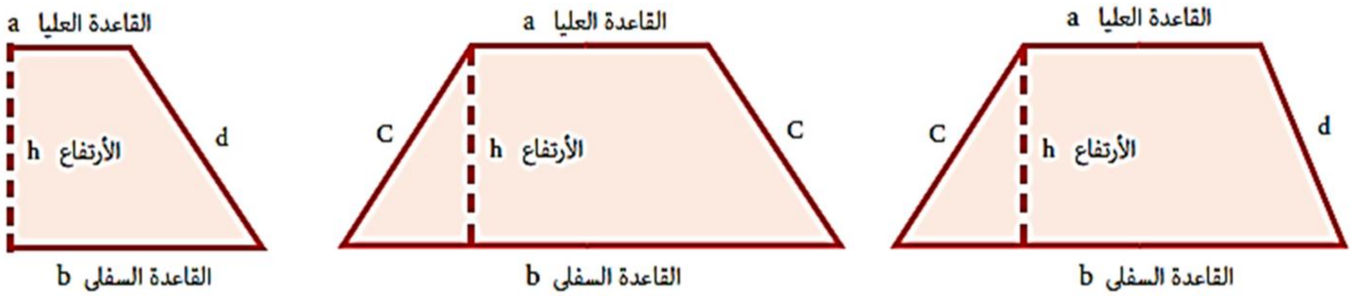
$$P = 4 \times 43$$

$P = 172\ cm$ المحيط



شبه المنحرف / Trapezoid

وهو شكل رباعي تختلف الاطوال ، فيه ضلعان متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف وآخرين غير متوازين ، اذا كان الضلعان غير المتوازيين متساويين سمي شبه المنحرف متساوي الساقين واذا كانت احدى زواياهُ قائمة سمي شبه منحرف قائم الزاوية .



شبه منحرف قائم الزاوية — شبه منحرف متساوي الساقين — شبه منحرف مختلف الساقين

مثال ٣ / i) جد مساحة شبه المنحرف الذي طولا ضلعين متوازيين فيه ١٢ cm ، ٨ cm و ارتفاعه ٤ cm .

$$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h = \frac{1}{2}(8 + 12) \times 4 = 40\ cm^2$$

ii) جد محيط شبه المنحرف متساوي الساقين طول كل من ساقيه ٨ cm وطول قاعدتهُ العليا ٥ cm

وطول قاعدتهُ السفلى ١٠ cm.

$P = a + b + c + d$

محيط شبه المنحرف $5 + 10 + 8 + 8 = 31\text{ cm}$

تأكد من فهمك /

١) استعمل خصائص متوازي الاضلاع للشكل المجاور لتجد كل من :
$CD, m\angle A, m\angle D$

كل ضلعين متقابلين متطابقين $AB = CD$

$3x - 1 = 8 \Rightarrow 3x = 8 + 1 \Longrightarrow 3x = 9 \Longrightarrow x = \frac{9}{3} = 3$

طول كل ضلع منهما $\therefore AB = CD = 3\ (3) - 1 = 8\ cm$

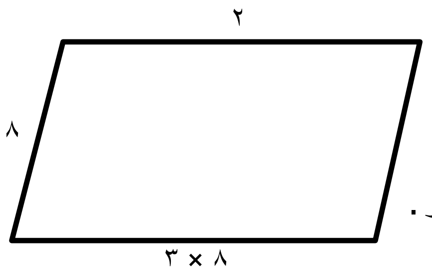
زاويتان داخليتان $m\angle D + m\angle C = 180°$

$m\angle D + 30 = 180 \Longrightarrow m\angle D = 180 - 30 = 150°$

متقابلتان في متوازي اضلاع $m\angle A = m\angle C$

$m\angle A = 30°$

٢) اوجد محيط متوازي الاضلاع اذا علمت ان طول احد اضلاعه ٨ cm وطول ضلعهُ المجاور ثلاثة امثالهُ

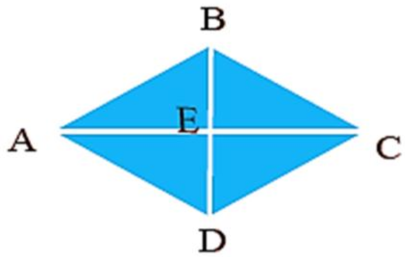


اذا كان طول احد اضلاع المتوازي = 8 cm

وطول ضلعه المجاور = $8 \times 3 = 24\text{ cm}$

ومحيط المتوازي = مجموع الاضلاع الأربعة $24 + 8 + 24 + 8 = 64$ سنتميتر .

٣) الشكل المجاور ABCD متوازي اضلاع فيه $m\angle BCE + m\angle ADE = 90°$ اثبت ان الشكل يمثل معين



$\overline{AC}$ ينصف زاوية BCD

$\overline{BD}$ ينصف زاوية ADC

بالتنصيف $m\angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCD$

بالتنصيف $m\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADC$

اذن $m\angle DCE + m\angle CDE = 90°$ بالتعويض عما يساويها

اذن $m\angle BCD + m\angle ADC = 180°$

و هما زاويتان متتاليتان وكذلك $m\angle DEC = 180° - 90°$

$m\angle DEC = 90° \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$

وكل ضلعان متجاوريين متساويين بالقياس لذلك الشكل (معين)

٤) معين مساحتهُ $300\ cm^2$ وارتفاعهُ $15\ cm$ فما طول ضلعهُ .

المعين مساحة = طول ضلعهُ × ارتفاعهُ

$A = h \times L$

$300 = 15 \times L \rightarrow L = \frac{300}{15} = 20\ cm$ طول ضلعهُ

٥) معين محيطهُ $36\ cm$ فما طول ضلعهُ .

محيط المعين = 4 × طول الضلع

$P = 4L$

$36 = 4L \rightarrow L = \frac{36}{4} = 9\ cm$ طول الضلع

٦) شبه منحرف طول القاعدتين المتوازيتين العليا والسفلى على التوالي $7\ cm$ ، $9\ cm$ وارتفاعه $3\ cm$ فما مساحتهُ ؟

$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h$

$= \frac{1}{2}(7 + 9) \times 3$

$\frac{1}{2} \times 16 \times 3$

$= 24\ cm^2$ مساحة شبه المنحرف

٧) شبه منحرف متساوي الساقين مساحتهُ $90\ cm^2$ وارتفاعهُ $5\ cm$ جد طول كل من قاعدتيه اذا علمت ان طول قاعدته العليا نصف قاعدته السفلى .

نفرض ان طول قاعدته العليا x فأن طول قاعدته السفلى $= 2x$

$A = \frac{1}{2}(a + b)h \rightarrow 90 = \frac{1}{2}(x + 2x)5$

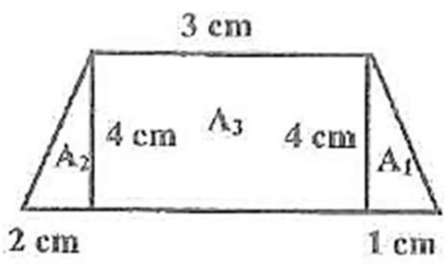
$90 = \frac{1}{2}(3x)5 \rightarrow 180 = 15x$

طول القاعدة العليا $x = \frac{180}{15} = 12\ cm$

طول القاعدة السفلى $2x = 2 \times 12 = 24\ cm$

فكر:

١٦



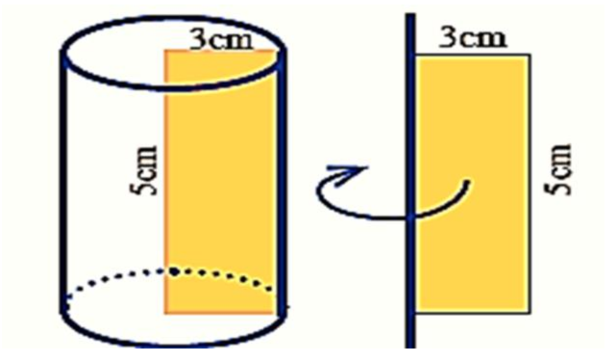
الدرس الخامس / الأسطوانة والكرة (الخصائص _ المساحة السطحية _ الحجم)
(Cylinder and Sphere (properties – surface Area – volume)

فكرة الدرس : التعرف الى خصائص كل من الاسطوانة والكرة وكيفية ايجاد المساحة السطحية والحجم لكل منهما .

المفردات : نصف القطر ، الا تفاع ، المساحة الجانبية ، المساحة الكلية ، الحجم .

واليك المثال التالي :

تعلم : لدينا مستطيل ابعادهُ ٥ cm ، ٣ cm ثبت على سلك معدني عمودي ودور كما مبين في الشكل بأستخدام محرك نلاحظ تولد الشكل الذي نسميه بالاسطوانة الدائرية القادمة



لاحظ ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المتولدة وارتفاعها هما قيمة ابعاد المستطيل . خذ علبة مرطبات اسطوانية الشكل وتخلص من القاعدتين ثم قصها عمودياً وافرد القطعة المعدنية ستلاحظ انها تمثل شكل مستطيل .

الأسطوانة Cylinder :

وهي مجسم لهُ قاعدتان دائريتان متوازيتان ومتطابقتان محاطٌ بسط جانبي اسطواني . ويسمى المستقيم المار بمركز القاعدتين (محور الاسطوانة) ويسمى المستقيم المماس للقاعدتين والموازي لمحور الاسطوانة (مولد الاسطوانة) مولدات الاسطوانة الواحدة متساوية فيما بينها بالطول ، والعمود المحدد بقاعدتي الاسطوانة فأنه يسمى (ارتفاع الاسطوانة) ويرمز له بالرمز h . واذا كان مولد الاسطوانة عمودياً على قاعدتها سميت الاسطوانة (اسطوانة قائمة) . ويكون ارتفاعها مساوياً لمولدها واذا كان مولد الأسطوانة مائلاً على قاعدتيها سميت (اسطوانة مائلة) .

حجم الاسطوانة الدائرية التامة $V = \pi r^2 h$ الحجم

المساحة الجانبية $LA = 2\pi rh$ (المساحة الجانبية)

المساحة الكلية تساوي مجموع المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين أي :

حيث πr^2 مساحة القاعدة $TA = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (المساحة الكلية)

وأن r نصف قطر قاعدة الاسطوانة ، h الارتفاع ، π النسبة الثابتة $\frac{22}{7}$

مثال ١ / اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ cm ، وارتفاعها ١٢ Cm أحسب مساحتها الجانبية ثم أحسب مساحتها الكلية وحجمها .

١) المساحة الجانبية $LA = 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 12 = 528\ cm^2$

٢) المساحة الكلية $TA = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 528 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 528 \times 308 = 836\ cm^2$$

3) الحجم $V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12 = 1848\ cm^3$

الكرة Sphere

وهي مجسم مستدير (محدد بسطح كروي) ومن خصائصه ان كل نقطة من نقاط سطحهُ تبعد بأبعاد متساوية عن نقطة ثابتة في داخلهِ تسمى (مركز الكرة) وكل مستقيم يمر بمركز الكرة وينتهي طرفاهُ بسطحها يسمى (قطر الكرة) اما (نصف قطر الكرة) فهو الخط الواصل بين المركز والسطح للكرة .

حجم الكرة : $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ ، المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2$

مثال٢ / جد المساحة السطحية والحجم لكرة نصف قطرها ٧ cm

i) المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616\ cm^2$

ii) الحجم $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 7 \times 7 = 1437\ cm^3$$

مثال٣ / حصالة نقود : صنع نموذج مصغر لحصالة نقود على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها ١٠ cm وارتفاعها ٣٠ cm تعلوها نصف كرة . احسب الحجم والمساحة السطحية لها .

حجم حصالة النقود = حجم الأسطوانة + حجم نصف الكرة

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \pi(10)^2 \times 30 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi \times 10^3\right)$$

$$= 3000\pi + \frac{2000}{3}\pi = \frac{11000}{3}\pi \simeq 11513.33\ cm^3$$

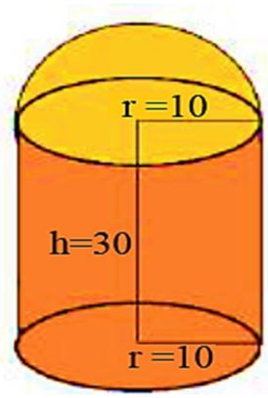
حيث $\pi = 3.14$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية للأسطوانة + مساحة قاعدة واحدة + نصف المساحة السطحية للكرة

$$TA = 2\pi rh + 2\pi r^2 + \frac{1}{2}(4\pi r^2)$$

$$TA = 2(3.14)(10)(30) + (3.14)(10)^2 + \frac{1}{2}(4)(3.14)(10)^2$$

$$= 1884 + 314 + 628 = 2826\ cm^2$$



تأكد من فهمك :

١) انبوب اسطواني دائري قائم مجوف طولهُ 21 m , ونصف قطرهُ الداخلي ٩ m فما حجمهُ ؟

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi r^2 h$

حجم الانبوب $= (3.14) \times (9)^2 \times 21 = 3.14 \times 81 \times 21 = 5341.14\ m^3$

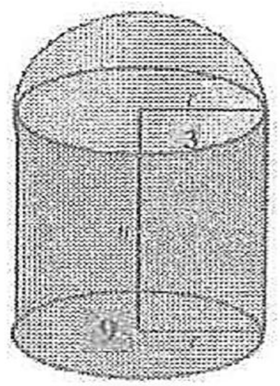
٢) جد المساحة السطحية والحجم للكرة التي نصف قطرها ١٠ m ؟

المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2 = 4(3.14) \times 10^2 = 1256\ m^2$

$V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 10^3 = 4186.6\ m^3$

٣) صنع خزان للوقود على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها ٣ m وارتفاعها ٩ m تعلوها نصف كرة احسب الحجم والمساحة السطحية للخزان .

الحجم = حجم الأسطوانة + نصف حجم الكرة



$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$

$V = 3.14 \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3.14 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 254.34 + 56.52 = 310.86\ m^3$

المساحه السطحيه للخزان = المساحة السطحية للخزان + $\frac{1}{2}$ المساحة السطحية للكرة

$TA = 2\pi rh + \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

$= 2 \times 3.14 \times 3 \times 9 + \frac{3}{14} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3.14 \times 3 \times 3$

$= 169.56 + 28.26 + 56.52 = 254.34\ m^2$

٤) مستودع وقود كروي الشكل مساحتهُ السطحية $\pi\ m^2$ ٥٧٦ جد حجمهُ .

$SA = 4\pi r^2 \rightarrow 576\pi = 4\pi r^2$

نصف القطر $r^2 = \frac{576\pi}{4\pi} = 144 \rightarrow r = \sqrt{144} = 12\ m$

الحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \times \cancel{12}^4 \times 12 \times 12 = 2304\pi\ m^3$

٥) اناء على شكل نصف كرة مساحته السطحية $\pi\ cm^2$ ١٢٨ . جد حجمه .

$\therefore r = \sqrt{64} = 8\ cm$ نصف القطر $V = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{4}{3}\pi r^3$ $= \frac{2}{3\pi}(8)^3$ $V = \frac{1024}{3}\pi cm^3$ حجم نصف الكرة	$\therefore \frac{1}{\cancel{2}} \times 4\pi r^2 = 128\pi$ مساحة نصف الكرة $2\cancel{\pi} r^2 = 128\cancel{\pi}$ $r^2 = \frac{128}{2}$ $r^2 = 64$

٥) اناء على شكل نصف كرة مساحته السطحية $128\ \pi\ cm^2$. جد حجمه .

$\frac{4}{3}\pi r^3 =$ حجم الكرة

$4\pi r^2 =$ المساحة السطحية الكرة

$A = \frac{1}{2}(4^2\pi r^2)$

$128\pi = 2\pi r^2$

$r^2 = \frac{128\pi}{2\pi} = 64$

$\therefore r = \sqrt{64} = 8\ cm$ نصف قطر الكرة

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 =$ نصف حجم الكرة

$V = \frac{4}{6}\pi(8)^3 = \frac{4\pi}{\cancel{6}3} \times \cancel{512}$

$\therefore V = \frac{1024\pi}{3}\ cm^3$

٦) دورق اسطواني الشكل حجمهُ $128\pi cm^3$ وارتفاعه $8\ cm$ جد مساحتهُ الجانبية .

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $\quad V = \pi r^2 h$

$128\pi = \pi r^2 \times 8 \rightarrow 128\pi = 8\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{128\pi}{8\pi} = 16$

$\rightarrow r = \sqrt{16} = 4\ cm$

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الأرتفاع $\quad LA = 2\pi\ r\ h$

$= 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi\ cm^2$

٧) اذا كانت نسبة حجم كرة نصف قطرها r_1 الى حجم كرة ثانية نصف قطرها r_2 تساوي $\frac{8}{125}$ جد نسبة المساحة السطحية للكرة الاولى الى المساحة السطحية للكرة الثانية .

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{8}{125} \rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{2}{5}$$ بأخذ الجذر التكعيبي

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^2}{\frac{4}{3}\pi r_2^2} = \frac{4\pi(2)^2}{4\pi(2)^2} = \frac{4}{25}$$

١٤) سائل : جد سعة الكوب المجاور اذا علمت ان قطر القاعدة ٧ cm وارتفاعه 10 cm .

(السعة يعني الحجم)

نصف قطر القاعدة $= 7 \div 2 = 3.5$ سم

$$V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 10$$

$$= \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}^{2}} \times \cancel{3.5} \times 3.5 \times 10 = 385\ cm^3$$ حجم الكوب

١٥) صناعة : أحسب مقدار ما تتسع لهُ العلب الأسطوانية الأربعة المتماثلة للحجم اذا علمت ان نصف قطر قاعدتها ٣.٥cm وأرتفاعها ١٠cm ثم جد المساحة اللازمة من اللوح المعدني المستخدم لصناعتها كلها .

نجد حجم علبة واحدة وتضرب في ٤ مقدار الاتساع .

$4V = 4(\pi r^2 h) \rightarrow 4V = 4 \times \pi \times 3.5^2 \times 10$ حيث الارتفاع $h = 10$

$\rightarrow 4V = 490\pi\ cm^3$ حجم العلب الاربعة

$LA = 2\pi rh = 2 \times \pi \times 3.5 \times 10$ نجد المساحة السطحية الواحدة

$= 70\pi\ cm^2 \rightarrow 4SA = 70\pi \times 4 = 280\pi\ cm^2$

مساحة قاعدة العلبة $= 3.5^2 \times \pi = 12.25\pi$

مجموع المساحة الكلية = المساحة السطحية + قاعدة العلبة(4 علب عليا وسفلى)

$= 12.25\pi \times 8 + 280\pi = 378\pi\ cm^2$

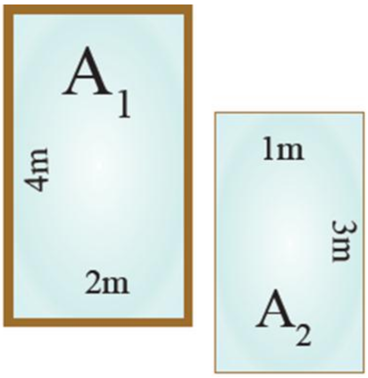
الدرس السادس / مساحة الأشكال المركبة المنتظمة وغير المنتظمة
Area of Regular an Irregular compound shapes

نحدد الشكلين المستويين البسيطين اللذين يتكون منها هذا الشكل المركب وهما مستطيلان :

- نجد مساحة المستطيل الداخلي . نجد مساحة المستطيل الخارجي .
- نجد مساحة الممر عن طريق مساحة المستطيل الداخلي من مساحة المستطيل الخارجي .

مساحة الأشكال المستوية المركبة المنتظمة .

المستوى المركب المنتظم يتكون من شكلين مستويين بسيطين او اكثر .
ولأيجاد مساحتهُ نقسم الشكل المستوي المركب المنتظم الى اشكال مستوية بسيطة .



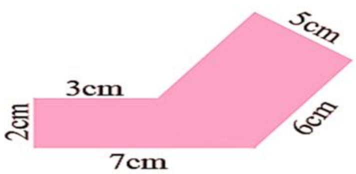
مثال ١/ حاول ايجاد مساحة الممر في الشكل المركب في فقرة تعلم :

نجد مساحة المستطيل الخارجي $A_1 = h \cdot L = 4 \times 2 = 8\ m^2$

نجد مساحة المستطيل الثاني $A_2 = h \cdot L = 3 \times 1 = 3\ m^2$

مساحة الممر تساوي حاصل طرح المستطيل الداخلي من مساحة المستطيل الخارجي اي:

$$A = A_1 - A_2 = 8 - 3 = 5\ m^2$$



مثال ٢/ لحساب مساحة الشكل المركب المنتظم المجاور :

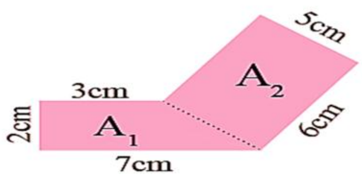
الشكل المركب المنتظم يحتوي هما شبه المنحرف والمستطيل

مساحة شبه المنحرف $A_1 = \frac{1}{2}(a+b) \times h$

$$= \frac{1}{2}(7+3) \times 2 = 10\ cm^2$$

مساحة المستطيل $A_2 = h \cdot L = 5 \times 6 = 30\ cm^2$

مساحة الشكل المركب $A = A_1 + A_2 = 10 + 30 = 40\ cm^2$

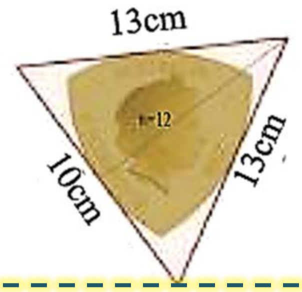


- مساحة الاشكال المستوية المركبة غير المنتظمة :

المستوي المركب غير المنتظم يتكون من شكلين مستويين بسيطين او اكثر غير منتظمين لأيجاد مساحتهُ نقسم الشكل المستوي المركب غير المنتظم الى اشكال مستوية منتظمة بسيطة قريبة من شكلهِ نحسب قيمة مساحات الاشكال المستوية البسيطة ونجمع نتائجها وتحتسب بوصفها قيمة تقريبية للشكل المستوي المركب غير المنتظم .

مثال٣ / في الشكل المجاور نموذج لعملة احدى الدول وهي مصممة على شكل مستوي غير منتظم ولحساب قيمة تقريبية لمساحة سطح العملة رسمنا مثلث متساوي الساقين تمس اضلاعه منحني العملة وثبتنا قياسات الاضلاع وارتفاع المثلث كما موضح بالشكل .

نحسب مساحة المثلث $A = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60\ cm^2$



ونظراً لكون مساحة سطح العملة اقل من مساحة سطح المثلث نقرب الناتج ونقول :
أن مساحة سطح العملة يساوي
تقريباً اقل من $60\ cm^2$.

مثال٤ / لحساب مساحة الشكل المظلل المجاور

نقسم الشكل الى الشكلين المستويين البسيطين اللذين يتكون منهما الشكل المركب هما مستطيل ونصفا دائرة متماثلتان (يمكن عدهما دائرة واحدة)

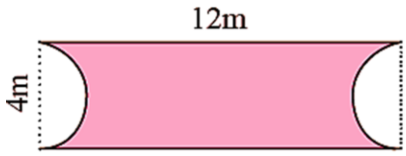
مساحة المستطيل $A_1 = h\,.\,L = 4 \times 12 = 48\ cm^2$

مساحة نصفي الدائرة $A_2 = \pi r^2 = 3.14 \times 2^2 = 12.56\ m^2$

اي اعتبرنا نصفي الدائرة هي دائرة واحدة لأنهما متماثلين

مساحة الشكل المظلل تساوي حاصل طرح الدائرة من مساحة المستطيل

$A = A_1 - A_2 = 48 - 12.56 = 35.44\ m^2$



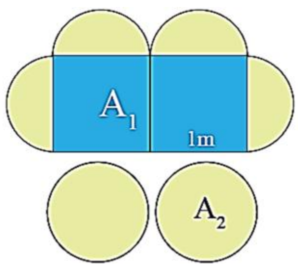
مثال٥ / جد مساحة سطح الشكل المستوي المركب المبين ادناه

يتكون الشكل المركب من مربعين متماثلين ودائرتين متماثلتين (اربعة انصاف دائرة متماثلة)

مساحة المربع : $A_1 = L^2 = 1 \times 1 = 1\ m^2$

مساحة الدائرة : $A^2 = \pi r^2 = 3.14 \times (0.5)^2 = 0.785\ m^2$

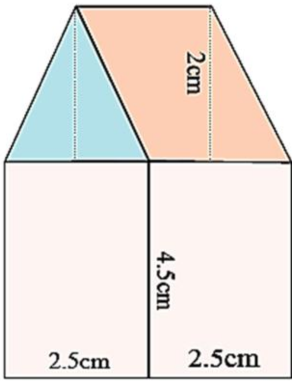
مساحة الشكل المظلل = 2 مربع + 2 دائرة



$$A = 2A_1 + 2A_2 = 2 \times 1 + 2 \times 0.785 = 3.57\ m$$

تأكد من فهمك : جد مساحة السطح المظلل لكل من الاشكال المستوية المركبة الأتية :

١) مساحة الجزء العلوي وهو شبه منحرف قاعدته السفلى $2.5 + 2.5 = 5\ cm$ وارتفاعه ٢ cm ومساحتهُ ١ وطول قاعدتهُ العليا ٢.٥ cm



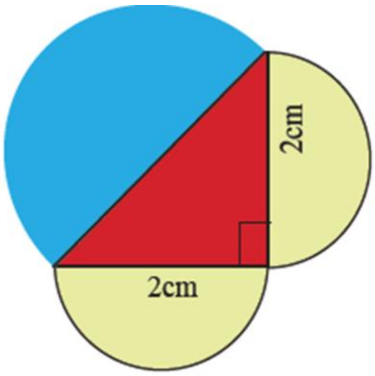
$$A_1 = \frac{1}{2}(a+b) \times h = \frac{1}{2}(2.5+5) \times 2 = 7.5\ cm^2$$

ومساحة المستطيل طول قاعدته $2.5 + 2.5 = 5\ cm$ وارتفاعه ٤.٥ cm ومساحتهُ A_2

$$A_2 = 5 \times 4.5 = 22.5\ cm^2$$

مساحة الشكل $A = A_1 - A_2 = 7.5 + 22.5 = 30\ cm^2$

٢) مساحة الشكل تمثل مساحة المثلث مساحة نصف دائرة كبيرة ومساحة نصفي الدائرة الصغيرة .



نفرض مساحة المثلث A_1

نفرض مساحة نصف الدائرة الكبيرة A_2

نفرض نصفي الدائرة الصغيرة وتمثل دائرة واحدة A_3

مساحة المثلث $A_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2\ cm^2$

قطر الدائرة الكبيرة يمثل وتر المثلث

من نظرية فيثاغورس $L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

قطر الدائرة $L = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm$

نق $\sqrt{2} = cm$

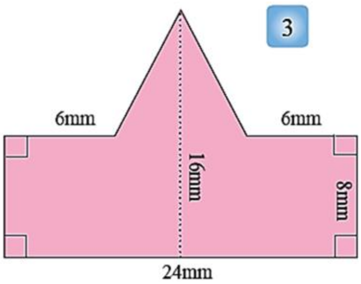
مساحة $\frac{1}{2}$ الدائرة الكبيرة $A_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2\pi \Longrightarrow 3.14\ cm^2$

مساحة نصفي الدائرة الصغيرة $A_3 = 1^2 \times \pi = 3.14$

المساحة الكلية $A_t = A_1 + A_2 + A_3$

$$= 2 + 3.14 + 3.14 = 8.28$$

٣) نجد مساحة المستطيل والمثلث



مساحة المستطيل = القاعدة × الأرتفاع

$$A_1 = 24 \times 8 = 192\ mm^2$$

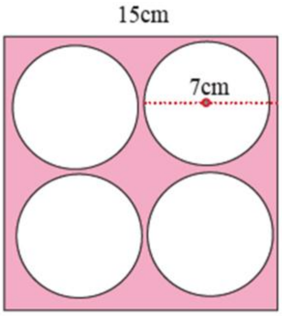
طول قاعدة المثلث $24 - (6 + 6) = 12\ mm$

ارتفاع المثلث $16 - 8 = 8\ mm$

مساحة المثلث $A_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48\ mm^2$

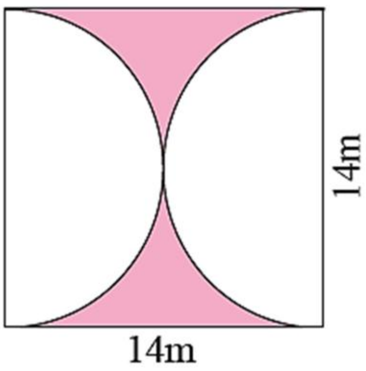
المساحة الكلية $A = A_1 + A_2 = 192 + 48 = 240\ mm^2$

٤) مساحة الشكل المظلل يساوي مساحة المربع – مساحة الدوائر الأربعة



$$A = A_1 - A_2 = (4 \times 4) - 4(3.14 \times 0.5 \times 0.5)$$
$$= 16 - 4 \times 0.79 = 16 - 3.16 = 12.84\ cm^2$$

٥) نجد مساحة الجزء المظلل .



i) نجد مساحة المربع

$$A_1 = 14 \times 14 = 196\ m^2$$

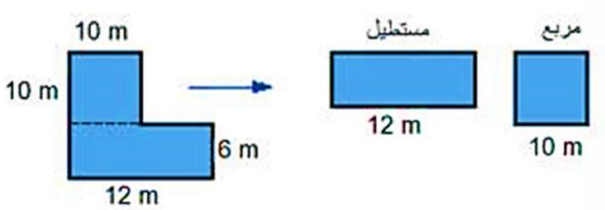
ii) نجد مساحة نصفي الدائرة وهما متماثلتان فيحسبان دائرة واحدة

$$A_2 = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (7)^2 = 154\ m^2$$

حيث $7 = 2 \div 14 = r$

مساحة المظلل $A = A_1 - A_2 = 196 - 154 = 42\ m^2$

٩) ادناه صور لمسبح مع مخطط لشكل سطحة المستوي المركب . أحسب مساحة سطح المسبح :



نجد مساحة المستطيل A_1 $A_1 = 12 \times 6 = 72\ m^2$

نجد مساحة المربع A_2 $A_2 = (10)^2 = 100\ m^2$

A مساحة سطح المسبح $= A_2 + A_1$

$$A = 72 + 100 = 172\ m^2$$

١٠) في الشكل المجاور خريطة احدى الدول وهي بلا شك تمثل شكلاً مستوياً مركباً غير منتظم ولغرض تقدير المساحة على الخارطة رسم شكلان مستويان بسيطان هما شبه المنحرف والمثلث للأحاطة بحدود الخريطة ، مستخدماً الأبعاد على الشكل . جد تقريباً مناسباً للمساحة على الخريطة .

نجد مساحة شبه المنحرف

$$A_1 = \frac{1}{2}(a+b) \times h = \frac{1}{2}(290+450) \times 140$$

$$= \frac{1}{2}(740 \times 140) = 51800\ km^2$$

نجد مساحة المثلث

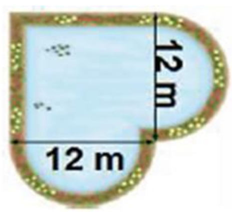
$$A_2 = \frac{1}{2} \times 230 \times 280 = 32200$$

مساحة الخريطة A

$$A = A_1 + A_2 = 51800 + 32200$$

$A = 84000\ km^2$ تقريباً

فكر: ١١) تحد بالشكل المجاور بركة محاطة بممر من البلاط عرضهُ m ٢ احسب مساحة البلاط .



نحسب نصف محيط المربع مضافاً اليه محيط نصف الدائرة الاولى والثانية وتضرب في ٢ متر .

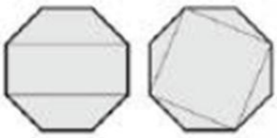
الممر الذي يحيط المربع $12 + 12 = 24$ m

محيط نصف الدائرة $P = \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3.14 \times 6 = 18.84\ m$

$\therefore 24 + 18.84 + 18.84 = 61.68\ m$ المحيط $\rightarrow 61.68 \times 2 = 123.36\ m^2$

مساحة الممر

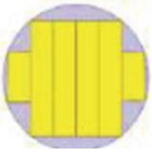
مسألة مفتوحة / الشكل يوضح طريقتان لأيجاد مساحة مضلع منتظم ذي ثمانية اضلاع . اشرح مضمون الطريقتين ثم ابحث عن طريقة ثالثة .



الطريقة الأولى : نحسب مساحة المربع الاوسط + مساحة المثلثات الاربعة

الطريقة الثانية : نحسب مساحة المستطيل الاوسط ثم نحسب مساحة شبه المنحرف الاعلى والأسفل .

الطريقة الثالثة : نقسم المثمن الى مثلثات عدد ٨ ونحسب مساحة مثلث واحد ثم نضربه بالعدد ٨ والناتج يمثل مساحة المثمن .



الدرس السابع / خطة حل المسألة (الاستدلال المنطقي)

Problem solving plan (Iogical in ference)

فكرة الدرس : استعمال الاستدلال المنطقي في حل المسألة .

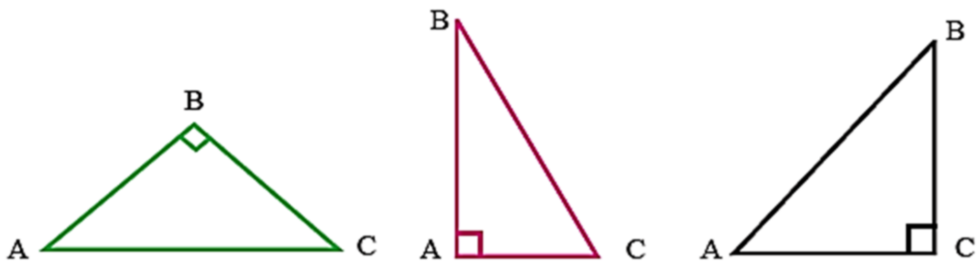
تعلم : الشكل المجاور مثلث قائم الزاوية ما العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم ؟

أفهم : ما المعطيات في المسألة ؟ مثلث قائم الزاوية اي احدى زواياه $90°$.

ما المطلوب من المسألة ؟ ايجاد العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم .

خطط : كيف تحل المسألة ؟ ارسم عدة مثلثات قائمة الزاوية واستعمل مجموع زوايا المثلث للأستدلال على العلاقة بين الزاويتين الحادتين .

حل : بما أن مجموع قياس زوايا المثلث $180°$ في كل حالة وان المثلث قائم الزاوية يكونان (متتامتان) لأن مجموع اي زاويتان قياسهما $90°$ تسميان (زاويتان متتامتان) .



تحقق : مجموع قياس الزاويتان الحادتان + قياس الزاوية القائمة = $90° + 90° = 180°$

اذن الحل صحيح .

مسائل:

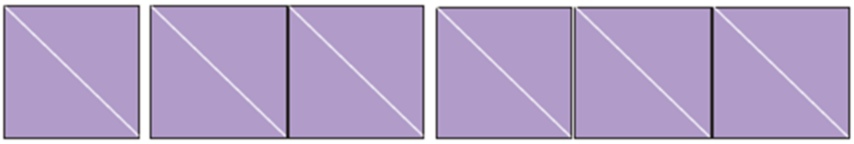
١) ارسم عدة مستطيلات واقطارها ثم قسر الاقطار

ماذا تستنتج عن طولي القطرين بالمستطيل ؟

مجموع طول القطرين = ٢ × الجذر التربيعي لمجموع مربعي طولي الضلعين القائمين .

٢) رتبت المثلثات القائمة الزاوية لتكون النمط الموضح بالشكل التالي فأذا كانت مساحة كل مثلث يساوي

cm^2 ١٢ فأوجد مساحة النمط المتكون في الشكل الثالث .



الحل / بما ان الشكل الثالث مؤلف من ٦ مثلثات اذن مساحته تكون cm^2 ٧٢ = ١٢ × ٦

---

٣) استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتخمين قياس كل من الزاويتين الحادتين في اي مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين . واستنتج من ذلك العلاقة بين هاتين الزاويتين .

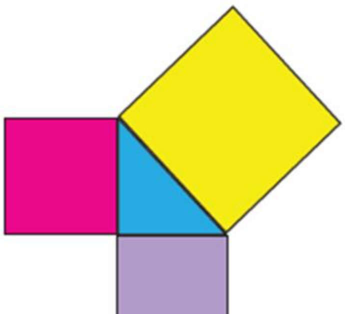
ما المطلوب في المسألة ؟ مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين والمطلوب استنتاج علاقة بين الزاويتين الحادتين .

مجموع زوايا المثلث = $180°$ وبما ان المثلث قائم الزاوية اي احدى زواياه $90°$ فأن مجموع الزاويتين الحادتين $90° = 90° - 180°$ وبما انهما متساويتان بالقياس لأن المثلث متساوي الساقين فأن قياس كل منهما $\frac{90°}{2} = 45°$.

اذن فالمثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين يكون قياس كل زاوية حادة منة $45°$.

التحقق : $180° = 45° + 45° + 90°$ اذن الجواب صحيح .

٤)استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتقدير العلاقة بين اضلاع مثلث قائم



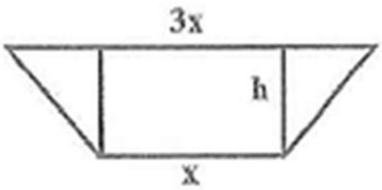
الزاوية ومتساوي الساقين واستنتج من ذلك صيغة خاصة لمبرهنة فيثاغورس .

الحل / تنشأ على كل ضلع مربعاً ونجد مساحة كل منهما فنجد ان مساحة المربع المنشأ

على الوتر يساوي مجموع المساحتين المنشأين على الضلعين القائمين الآخرين

فلو كان طول الوتر a وطول كل من الضلعين المتساويين القائمين b فأن $a^2 = b^2 + b^2 \rightarrow a^2 = 2b^2$

٥) استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتقدير مساحة شبه منحرف متساوي الساقين طول قاعدته العليا ثلاثة امثال طول قاعدته السفلى واستنتج من ذلك صيغة خاصة لقانون المساحة عندما يكون طول احد القاعدتين من مضاعفات طول القاعدة الآخرى .



اذا كان طول القاعدة السفلى = x

فأن طول القاعدة العليا = 3x

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)h = \frac{1}{2}(4x)h$$

$$\therefore A = 2xh$$

(الفصل السادس)

الهندسة الاحداثية Coordinate Geometry

الدرس الأول : تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الاحداثي

الدرس الثاني : مقدمة في الدوال

الدرس الثالث : الدوال الخطية .

الدرس الرابع : الانعكاس والدوران في المستوى الاحداثي .

الدرس الخامس : الانسحاب في المستوى الاحداثي .

الدرس الأول : تمثيل جدول دالة محددة في المستوي الاحادي
Representing Table function in coordinate plane

فكرة الدرس : تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الاحداثي .

المفردات : المدخلة ، المخرجة ، جدول دالة ، المستوي الاحداثي ، الارباع الاربعة .

اليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

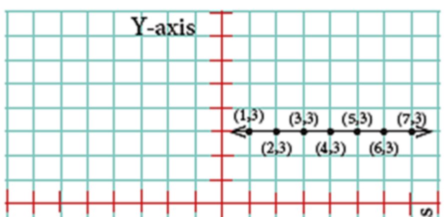
تعلم : أراد علي ان يقيس درجة حرارة الماء في اناء بالدرجة المئوية ففي الساعة الاولى وجد ان درجة حرارة الماء

3°C وفي الساعة الثانية كانت درجة الحرارة للماء 3°C فجد درجة الحرارة للماء بدرجة مئوية بعد سبع ساعات .

تمثيل الدوال في المستوي الاحداثي :

- العلاقة التي مدخلاتها متغيرة ومخرجاتها ثابتة تمثل دالة مستقيم يوازي محور السينات .
- العلاقة التي مدخلاتها ثابتة ومخرجاتها متغيرة تمثل دالة مستقيم يوازي محور الصادات .
- العلاقة التي مدخلاتها ومخرجاتها متغيرة تمثل مستقيم لا يوازي اي المحورين .
- المدخلات هي القيم التي تعوض في الدالة والمخرجات هي ناتج الدالة بعد التعويض .

مثال ١ / جد درجة حرارة الماء بعد سبع ساعات .



خطوة (١) : نفرض ان عدد الساعات x ونفرض ان درجة الحرارة للماء

في كل ساعة متساوية لـ y فنحصل على الجدول الآتي :

خطوة (٢) : نستعمل الجدول لإيجاد الازواج المرتبة

(٣ ، ٧) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ١)

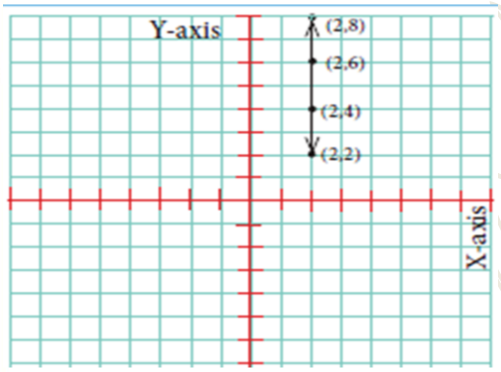
خطوة (٣) : نعين النقاط في المستوى الاحداثي ثم نصل بين النقط فنحصل

على مستقيم موازي لمحور السينات (قيم x متغيرة ، قيم y ثابتة)

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	3	3	3	3	3	3	3

مثال ٢ / مثل الجدول التالي في المستوي الاحداثي .

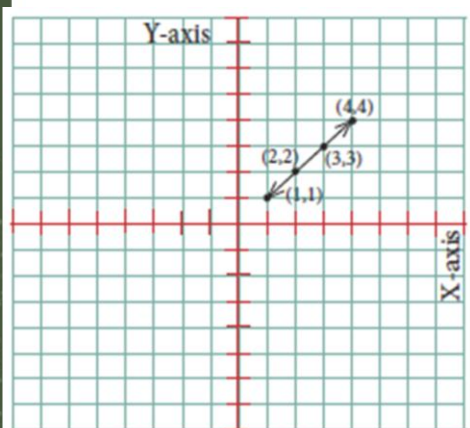
من الجدول نلاحظ ان قيم x ثابتة ومنهُ نكون ازواجاً مرتبة ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٨) تمثل النقاط على المستوي ثم نصل بين النقاط نلاحظ ان المستقيم موازي لمحور الصادات (قيم x ثابتة قيم y متغيرة) .



X	2	2	2	2
Y	2	4	6	8

مثال ٣ / الجدول التالي يبين الكمية التي ينتجها حقل الرميلة على مدى

أربعة أيام ، مثل كتابة الجدول على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة { (٤ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (١ ، ١) } ثم نحدد كل نقطة في المستوى الأحداثي نصل بين النقاط نلاحظ ان المستقيم لايوازي اي من المحورين (قيم x متغيرة ، قيم y متغيرة) .

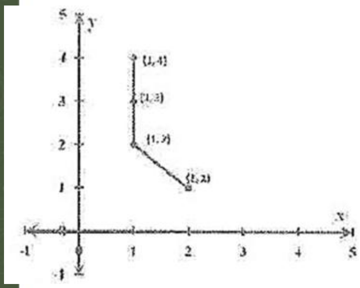


عدد الأيام	X	1	2	3	4
كمية النفط	Y	1	2	3	4

- **كتابة جدول من نقاط معينة في المستوي الاحداثي**

تأكد من فهمك : مثل الجداول التالية في المستوي الاحداثي ، ثم صل بين النقاط في المستوي الاحداثي ، ماذا تلاحظ ،وما الشكل الناتج ؟

١)



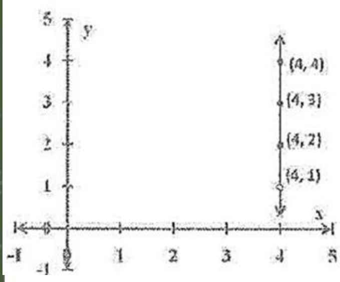
X	2	1	1	1
Y	1	2	3	4

نعين النقاط من الجدول : (٤ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ١) (١ ، ٢)

ثم نثبت هذه النقاط على المستوي الاحداثي ماذا نلاحظ ؟

لا تمثل خط مستقيماً .

٢)



X	4	4	4	4
Y	1	2	3	4

من الجدول نعين النقاط ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (١- ، ٤) (٤ . ٤)

(قيم X ثابتة و قيم y متغيرة) ثم نعين هذه

النقاط على المستوي نلاحظ انها تمثل خط مستقيم // محور الصادات

٣)

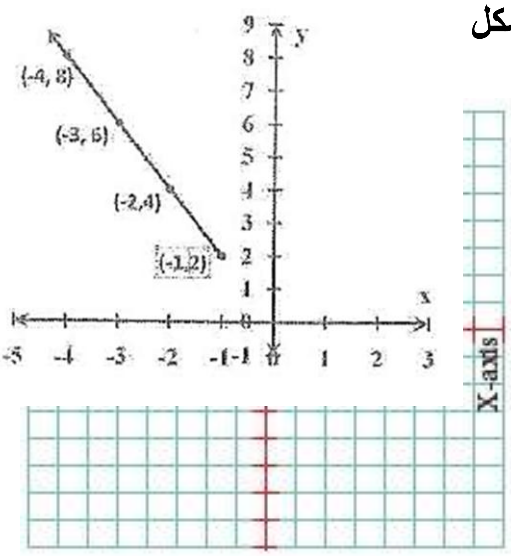
X	1	2	3	4
Y	-2	-2	-2	-2

من الجدول نعين النقاط (٢- ،٢) ، (٢ ، ١) ، (٢- ، ٤) ، (٢- ، ٣)

(قيم x متغيرة وقيم y ثابتة)

نعين النقاط على المستوى نحصل على مستقيم / محور السينات

اكتب جدول دالة من نقاط معينة في المستوي الاحداثي ، وبين نوع الشكل



٨) A(2 , 2) , B (-2 , 2) , C (-2 , -2) , D (2 , -2)

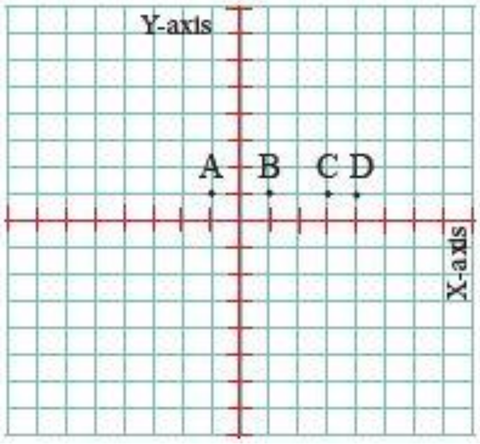
الشكل الناتج مربع

النقاط	A	B	C	D
x	٢	-٢	-٢	٢
Y	٢	٢	-٢	-٢

٩) A (-1 , 1) , B (1 ,1) , C (3 , 1) , D (4 , 1)

قيم متغيرة x وقيم y ثابتة

النقاط	A	B	C	D
x	-١	١	٣	٤
Y	١	١	١	١



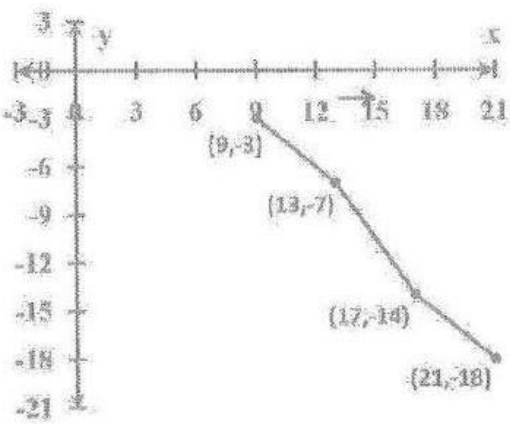
الشكل الناتج مستقيم يوازي محور السينات

١٠) علوم الأرض : سجل باحث علمي في القطب الجنوبي أربع قراءات لدرجة الحرارة وكانت قراءة المحرار كل اربع ساعات .

الدالة التي يمثلها الجدول اعلاه واكتب جدول الدالة

النقاط هي : (١٨- ، ٩) ، (١٤- ، ٥) ، (٧- ، ١) ، (٣- ، ٩)

الوقت	٩ صباحاً	١ ظهراً	٥ عصراً	٩ مساءاً
درجة الحرارة	-٣	-٧	-١٤	-١٨



	9	13	17	21	
x	9	+12 1	+12 5	+12 9	الوقت
y	-3	-7	-14	-18	درجة الحرارة

وحينما نحول الساعات الى نظام ٢٤ فتصبح (١٨- ، ٢١) ، (١٤- ، ١٧) ، (٧- ، ١٣-) ، (٣- ، ٩)

حس عددي : يطبع علاء في الساعة الواحدة ٥٠ كلمة على الطابعة فأذا كان عدد الكلمات في الصفحة التي يريد طبعها ٤٠٠ كلمة فإلى كم ساعة يحتاج ؟

في الساعة الأولى	في الساعة الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة	السابعة	الثامنة
٥٠	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠

ولو جمعنا الكلمات = ٤٠٠ لذلك يحتاج الى ٨ ساعات هذا حسب جدول الدالة ولتحقق ٨ = ٥٠ ÷ ٤٠٠ .

اكتب : مسألة ابتكر فيها جدول دالة محددة بنقاط معينة تمثل عدد الايام التي يقضيها عامل لحفر بئر خلال ٥ ايام ؟

يصل الحفر في اليوم الاول بحفر ٢ متر
وفي اليوم الثاني يحفر ٢ متر
وفي اليوم الثالث يحفر ٢ متر
وفي اليوم الرابع ٢ متر
وفي اليوم الخامس يحفر ٢ متر لذلك خلال ٥ ايام يحفر ١٠ امتار .

الايام	١	٢	٣	٤	٥
مقدار الحفر (متر)	٢	٤	٦	٨	١٠

الدرس الثاني / مقدمة في الدوال Introduction of functions

فكرة الدرس : تمثيل الدالة بعدد من النقاط في المستوي الاحداثي .

المفردات : الدالة – جدول الدالة – قاعدة الدالة – العنصر – الصورة .

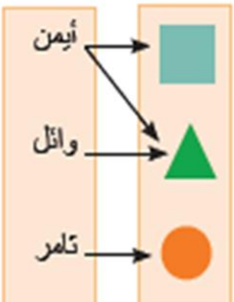
واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

تعلم : في مرسم المدرسة رسم أيمن ووائل وثامر اشكالاً هندسية فرسم ايمن مربع ومثلثاً ورسم وائل مثلثاً فرسم ثامر دائرة فجد العلاقة بين كل طالب والشكل الهندسي الذي رسمه .

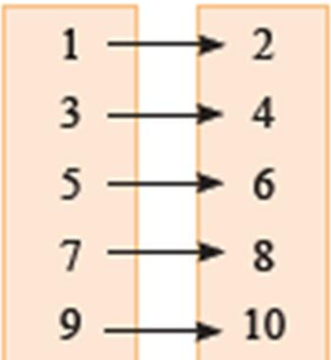
العلاقة والدالة : Relation and function

الدالة : هي علاقة تحدد قيمة مخرجة واحدة فقط لكل قيمة مدخلة .

قاعدة الدالة : هي الصيغة التي تستعمل لتعويض قيمة مدخلة للحصول على قيمة مخرجة .



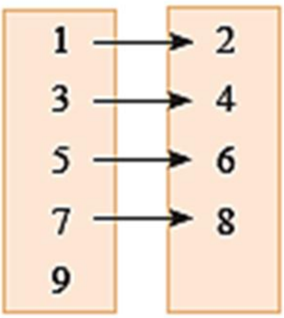
مثال ١ / ارسم مخطط العلاقة بين كل طالب والشكل الهندسي الذي
رسمهُ نلاحظ ان ايمن رسم شكلين هندسيين (مربع ، مثلث)
اي لهُ مخرجان لمدخلة واحدة لذلك فالعلاقة لا تمثل دالة .



مثال ٢ / حدد فيما اذا كانت كل علاقة فيما يلي دالة ام لا ؟ وفسر ذلك .

{(١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٧ ، ٨) ، (٩ ، ١٠)}

امثل العلاقة بالمخطط المجاور :
نلاحظ ان كل مدخلة لها مخرجة واحدة فقط لذلك فأن العلاقة تمثل دالة .
ملاحظة : تسمى العلاقة دالة اذا كان لكل مدخلة مخرجة حسب قاعدة الدالة .
واذا وجدت مدخلة ليس لها مخرجة تسمى علاقة وليست دالة .



مثال ٣ / لاحظ المخطط المجاور وبين أتمثل العلاقة دالة أم لا ؟ أفسر ذلك .
نلاحظ بأن العلاقة ليست دالة الا اذا كانت لكل قيمة مدخلة هناك مخرجة واحدة فقط كذلك اذا كان لمدخلة اكثر من مخرجة .

مثال ٤ / حدد فيما اذا كانت كل علاقة فيما يلي دالة أم لا ؟ وفسر ذلك .

i) { (٩ ، ١) ، (١٨ ، ٢) ، (١٥ ، ٣) ، (١٨ ، ٤) } نلاحظ ان العلاقة دالة لأن هناك مخرجة واحدة فقط لكل مدخلة .

ii) { (٥ ، -١) ، (٦ ، ٠) ، (٦ ، -١) ، (٨ ، ٢) } نلاحظ انها علاقة وليست دالة لأن هناك مخرجين ٥ ، ٦ للمدخلة -١ .

- اكمال جدول الدالة :

جدول الدالة : هو الجدول الذي ينظم قيمة المدخلة والمخرجة .

مثال ٥ / اكمل جدول الدالة ٣ – $y = x$ اذ ان ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ = x

نكمل جدول الدالة بالتعويض عن قيم x في قاعدة الدالة لنجد قيم y المناظرة وكما يلاحظ في الجدول المجاور

مخرجة الصورة	قاعدة الدالة	مدخلة العنصر
y	X – 3	x
-٤	٣ – ١ -	-١
٣ -	٣ – ٠	٠
٢ -	٣ – ١	١
١ -	٣ – ٢	٢

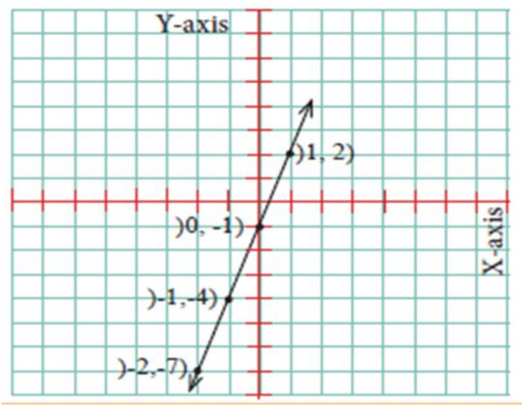
- تمثيل الدالة بعدد من النقط في المستوي الاحداثي .

مثال ٦ / مثل في المستوي الاحداثي الدالة ١ -$y = 3x$ اذ ان ١ ، ٠ ، -٢ ، -١ = x

خطوة (١) : نعمل الجدول ادناه .

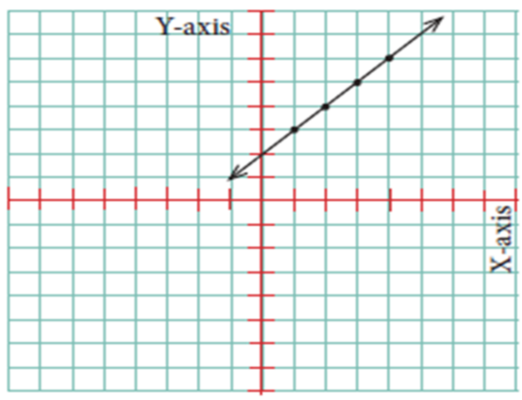
خطوة (٢) : نثبت النقاط في المستوي الاحداثي .

خطوة (٣) : نصل بين النقاط في المستوي الاحداثي ستحصل على مستقيم كما مبين في الشكل ادناه :



الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	قاعدة الدالة	العنصر (المدخلة)
(x , y)	y	٣X −1	x
(-١ ، -٤)	-٤	٣(-١) – ١	-١
(-٢ ، -٧)	-٧	٣ (-٢) –١	-٢
(٠ ، -١)	-١	٣ (٠) – ١	٠
(١ ، ٢)	٢	٣ (١) – ١	١

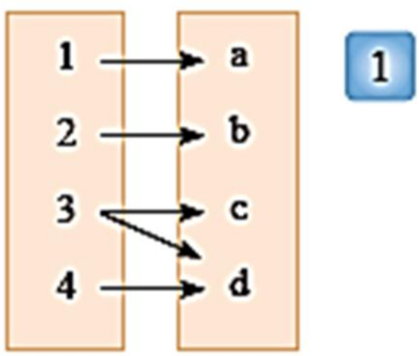
مثال ٧ / اكمل الجدول وامثلهُ في المستوي الاحداثي



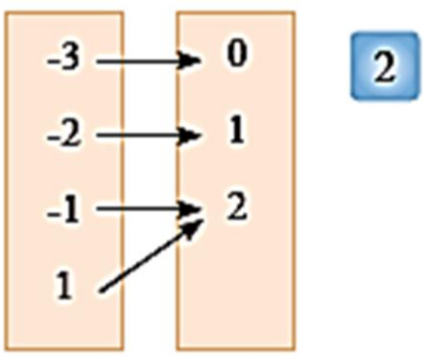
الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	(x + 2)	العنصر (المدخلة)
(١ ، ٣)	٣	١ + ٢	1
(٢ ، ٤)	٤	٢ + ٢	٢
(٣ ، ٥)	٥	٣ + ٢	٣
(٤ ، ٦)	٦	٤ + ٢	٤

تأكد من فهمك : حدد فيما اذا كانت العلاقة دالة ام لا ؟ ذاكراً السبب .

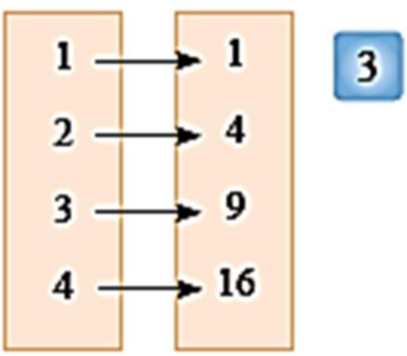
١)



ليست دالة لأنه ٣ لها مخرجان

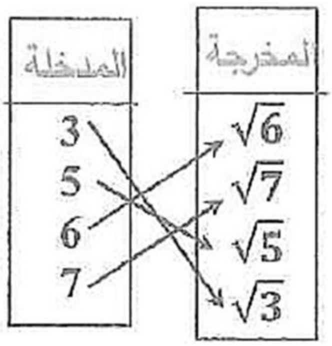


دالة لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط



دالة لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط

اذا كانت مجموعة المدخلات هي { ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٣ } ومجموعة المخرجات { $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{6}$ } حدد فيما اذا كانت العلاقات التالية دالة ام لا ؟ مع ذكر السبب .



٤) مدخلة ٣ مخرجتها $\sqrt{3}$

مدخلة ٥ مخرجتها $\sqrt{5}$

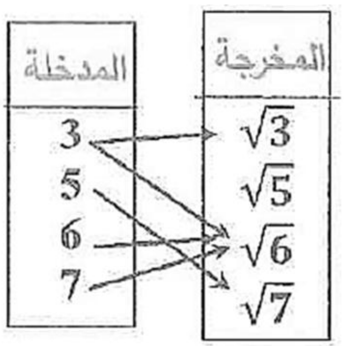
مدخلة ٦ مخرجتها $\sqrt{6}$

مدخلة ٧ مخرجتها $\sqrt{7}$

لذلك العلاقة هي دالة لكل عنصر (مدخلة) توجد صورة (مخرجة) واحدة لها ، وهذه هي شروط الدالة

٥) { (٧ ، $\sqrt{6}$) ، (٦ ، $\sqrt{6}$) ، (٣ ، $\sqrt{6}$) ، (٥ ، $\sqrt{7}$) ، (٣ ، $\sqrt{3}$) }

ليست دالة لأن المدخلة ٣ لها مخرجتان $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ وهذا لا يطابق شروط الدالة .

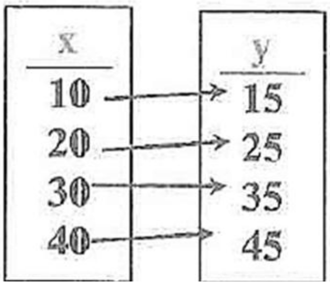


١٢) اكتب الدالة من الجدول الآتي :

العمر	X	١٠	٢٠	٣٠	٤٠
الكمية المستهدفة	Y	١٥	٢٥	٣٥	٤٥

$y = x + 5$

الدالة { (٤٥ ، ٤٠) ، (٣٥ ، ٣٠) ، (٢٥ ، ٢٠) ، (١٥ ، ١٠) }



تدرب وحل مسائل حياتية :

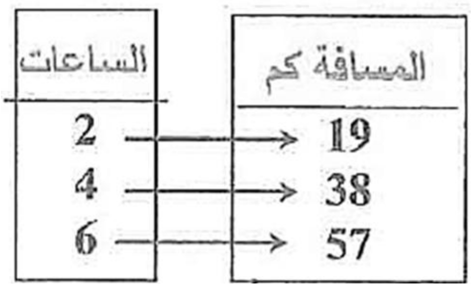
١٣) رياضة : محمود سباح ماهر يقطع ٥ . ٩ كم بالساعة ، كون جدولة دالة تمثل العدد الكلي للكيلومترات التي استطاع قطعها بـ (٢ ، ٤ ، ٦) ساعة .

$2 \times 9.5 = 19\ km$

$4 \times 9.5 = 38\ km$

$6 \times 9.5 = 57\ km$

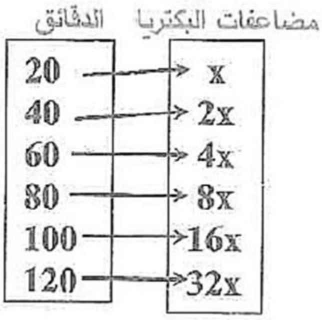
$\{ (2, 19), (4, 38), (6, 57) \}$



١٤) بكتريا : اذا كانت عدد البكتريا يزداد بمعدل الضعف كل ٢٠ دقيقة كم سيزداد عدد البكتريا خلال ساعتين . كون جدولة دالة .

نقسم الساعتين الى ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ = ١٢٠ دقيقة .

$\{ (20, x), (40, 2x), (60, 4x), (80, 8x), (100, 16x), (120, 32x) \}$



فكر :

١٧) تحد : جد مجموعة عناصر الدالة $y = 2x - 1$ التي صور عناصرها المجموعة { ٥٧ ، ٤٩ ، ٤١ }

$$2x - 1 = 41 \to 2x = 41 + 1 \to 2x = 42 \to x = \frac{42}{2} = 21$$

$$2x - 1 = 49 \to 2x = 49 + 1 \to 2x = 50 \to x = \frac{50}{2} = 25$$

$$2x - 1 = 57 \to 2x = 57 + 1 \to 2x = 58 \to x = \frac{58}{2} = 29$$

∴ عناصر مجموعة الدالة هي { ٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ }

---

١٨) اصحح الخطأ : سهى ومها وجدوا قاعدة دالة احد عناصرها اقل من الصورة بمقدار ٧ ؟ ايهما اصح ؟

مها: Y=X+7

سهى: Y=X-7

$y = x - 7 \to x = y + 7$ اكثر من الصورة بمقدار

$y = x + 7 \to x = y - 7$ اقل من الصورة بمقدار

لذلك جواب مها هو الصحيح .

١٩) حس عددي : دالة قاعدتها ٨ – ٤٢x حدد صورة العنصر ٢ في الدالة :

صورة العنصر $42x - 8 = 42\,(2) - 8 = 84 - 8 = 76$

الدرس الثالث / الدوال الخطية Linear functions

فكرة الدرس : كتابة معلومة تمثل دالة خطية من جدول الدالة .

المفردات : الدالة الخطية – معادلة المستقيم – المخطط البياني – الارباع الاربعة .

تعلم : اليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

اذا كان لدى سعيد منحل لأنتاج العسل ولاحظ ان النحلة تطير بسرعة ٢٤ كم في الساعة ما العلاقة التي تربط الزمن (عدد الساعات) والمسافة التي تقطعها بالكيلومترات ؟

- العلاقة تمثيل الدالة الخطية (معادلة المستقيم في المستوي الاحداثي) .

المعادلة الخطية : دالة تكون كل النقاط التي تنتج منها على مستقيم واحد غير عمودي يسمى هذا المستقيم بيان الدالة الخطية.

معادلة المستقيم : هي معادلة تعبر عن الدالة الخطية بالصورة $y = mx + t$ حيث m , t اعداد ثابتة .

مثال ١ / ما المسافة التي تقطعها النحلة بالكيلومتر على الزمن بالساعات ؟

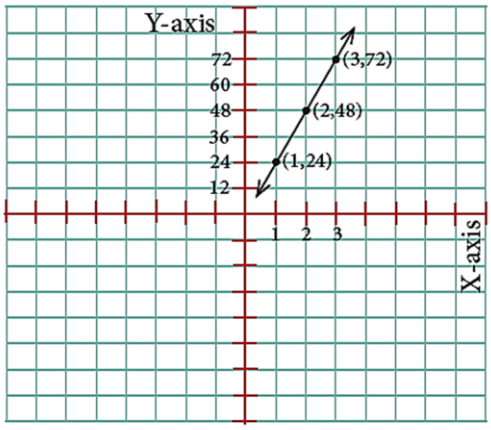
خطوة (١) : انشاء الدالة

نفرض زمن (عدد الساعات) طيران النحلة بالعنصر : x والمسافة المقطوعة y تمثل بالدالة $y=24x$.

خطوة (٢) انشئ جدول الدالة .

خطوة (٣) مثل الدالة في المستوي الاحداثي ولكي نرسم دالة خطية بيانية يكفي تعيين موقع نقطتين بيانياً من الدالة .

صل بين النقاط نلاحظ ان عندما تطير النحلة ساعتين تكون المسافة ٤٨ كم وعندما تطير ٣ ساعات تكون المسافة المقطوعة ٧٢ كم والمعادلة الناتجة تمثل مستقيماً .

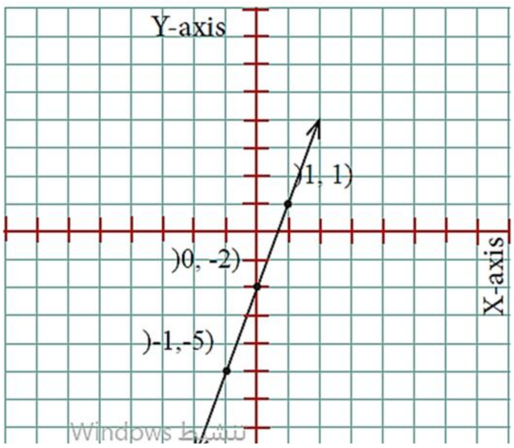


الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	$y = 24x$	العنصر (المدخلة)
(١ ، ٢٤)	٢٤	٢٤ (١)	1
(٢ ، ٤٨)	٤٨	٢٤ (٢)	٢
(٣ ، ٧٢)	٧٢	٢٤ (٣)	٣

مثال ٢ / الدالة الخطية $y = 3x - 2$ في المستوي الاحداثي .

الخطوة الاولى : نختار ثلاثة قيم الى x وتعوض بالدالة لنجد y فنحصل على نقاط (x ، y) ونكون جدول الدالة الخطية .

الخطوة الثانية : أمثل الدالة في المستوي الاحداثي . (نعين النقاط على المستوي الاحداثي ونصل بينها خط مستقيم)

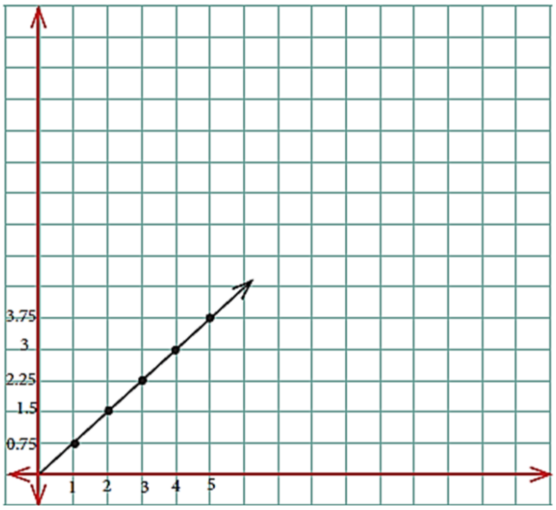


الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	$y = 3x - 2$	العنصر (المدخلة)
(-1 ، -٥)	-5	$y = 3(-1)-2$	-1
(٠ ، -٢)	-2	$y = 3(0)-2$	0
(١ ، ١)	1	$y = 3(1)-2$	1

- كتابة الدالة الخطية (معادلة المستقيم) من المخطط البياني للدالة .

مثال ٣ / في العام ٢٠١١ نجح مختبر علوم المريخ وكالة ناسا الفضائية في الهبوط بمختبر علمي متجول بحجم سيارة على سطح المريخ وبسرعة ٠.٧٥ m في الثانية الواحدة ، الرسم البياني يوضح دالة تبين المسافة التي هبط بها المتجول على الزمن المستغرق ، أنشئ جدول دالة خطية ثم اكتب المعادلة الخطية التي تمثلها .

من خلال الرسم البياني نستطيع إنشاء جدول دالة حيث نفرض ان الزمن بـ x والمسافة بـ y يتكون جدول الدالة الخطية .

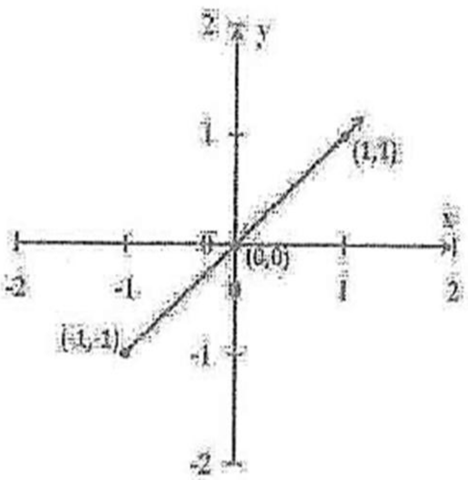


الصورة (المخرجة)	العنصر (المدخلة)
Y	X
0.75	1
1.5	2
2.25	3
3.00	4

من خلال الجدول نستنتج ان الدالة هي : $y = 0.75\,x$

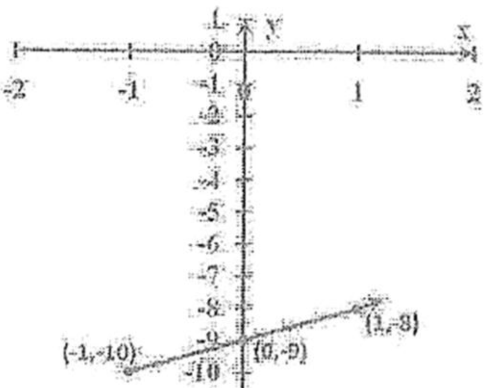
تأكد من فهمك : مثل الدوال الخطية التالية في المستوي الاحداثي :

1) $y = x$



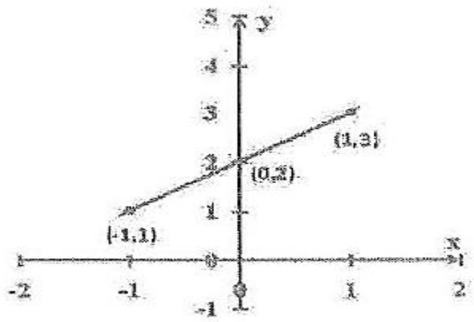
النقطة	(المخرجة)	قاعدة الدالة	(المدخلة)
(x , y)	y	y = x	X
(- ١ ، -1)	-1	y = -1	-١
(0 ، 0)	٠	y = 0	٠
(1 ، 1)	١	y = 1	١

2) $y = x - 9$



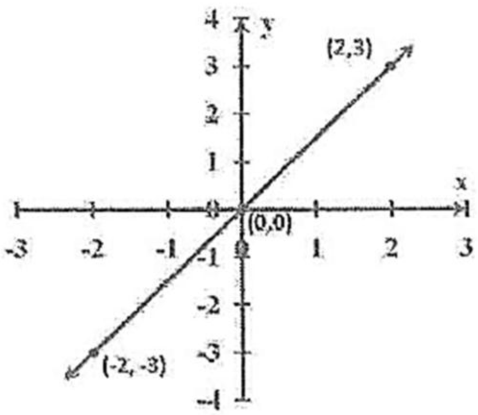
النقطة	(المخرجة)	قاعدة الدالة	(المدخلة)
(x , y)	y	y = x – 9	X
(- ١ ، -10)	-10	y = -1 – 9	-١
(0 ، -9)	-9	y = 0 – 9	٠
(1 ، -8)	-8	y = 1 – 9	١

3) $y = x + 2$



(المدخلة)	قاعدة الدالة	(المخرجة)	النقطة
X	$y = x + 2$	y	(x, y)
-١	$y = -1 + 2$	1	(-١ ، -1)
٠	$y = 0 + 2$	2	(0 ، 2)
١	$y = 1 + 2$	3	(1 ، 3)

4) $y = \frac{3}{2}x$

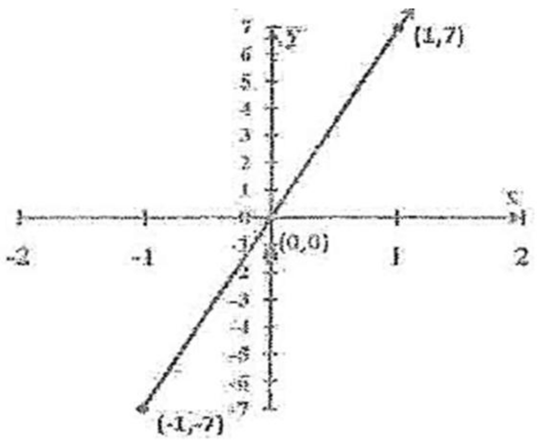


(المدخلة)	قاعدة الدالة	(المخرجة)	النقطة
X	$y = \frac{3}{2}x$	y	(x, y)
٢	$y = \frac{3}{2}(2)$	3	(2 ، 3)
٠	$y = \frac{3}{2}(0)$	0	(0 ، 0)
-٢	$y = \frac{3}{2}(-2)$	-3	(-2 ، -3)

تدرب وحل التمرينات / مثل الدوال الخطية التالية في المستوي الاحداثي :

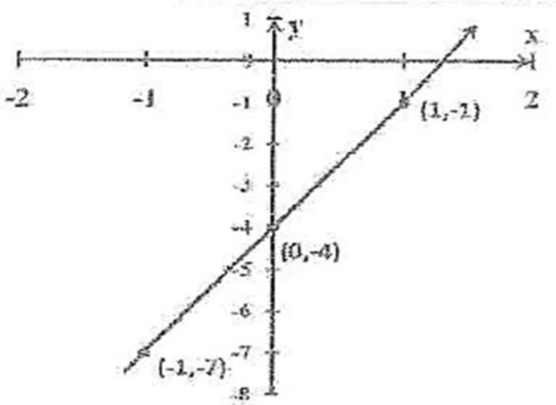
10) $y = 7x$

X	$y = 7x$	y	(x ، y)
-١	$y = 7(-1)$	-٧	(-١ ، -٧)
٠	$y = 7(0)$	0	(٠ ، 0)
١	$y = 7(1)$	7	(١ ، ٧)



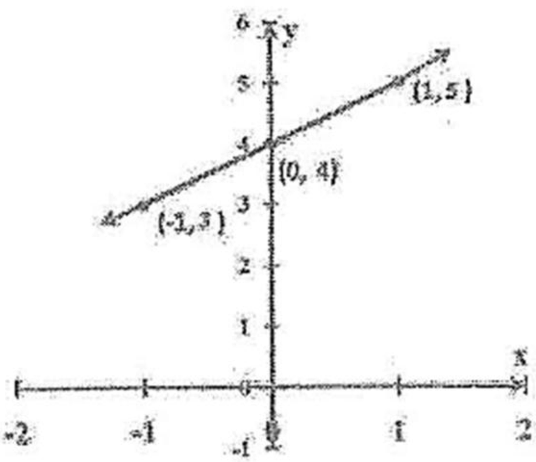
11) $y = 3x - 4$

X	$y = 3x - 4$	y	(x ، y)
-١	$y = 3(-1) - 4$	-٧	(-١ ، -٧)
٠	$y = 3(0) - 4$	-٤	(٠ ، -٤)
١	$y = 3(1) - 4$	-١	(١ ، -١)



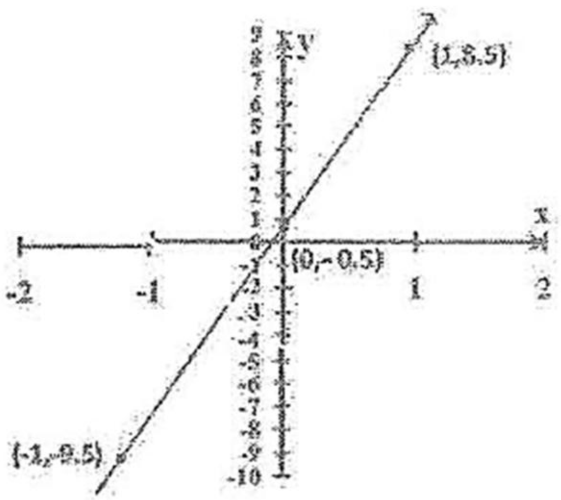
12) $y = x + 4$

x	$y = x + 4$	y	(x ، y)
-١	$y = (-1) + 4$	٣	(-١ ، ٣)
٠	$y = (0) + 4$	٤	(٠ ، ٤)
١	$y = (1) + 4$	٥	(١ ، ٥)



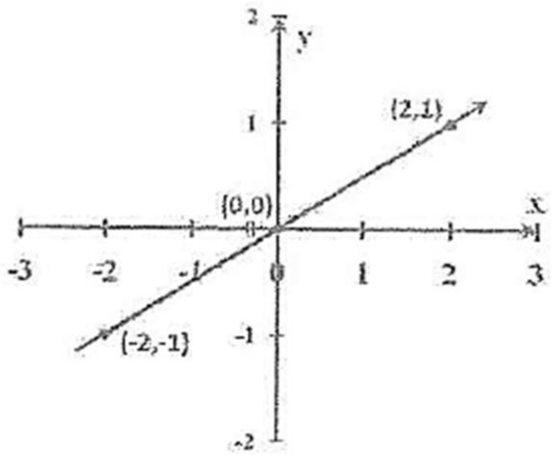
13) $y = 9x - 0.5$

X	$y = 9x - 0.5$	y	(x ، y)
-١	$y = 9(-1) - 0.5$	-9.5	-١ ، - 9.5)
٠	$y = 9(0) - 0.5$	0.5	(
١	$y = 9(1) - 0.5$	8.5	(٠ ، 0.5)
			(١ ، 8.5)



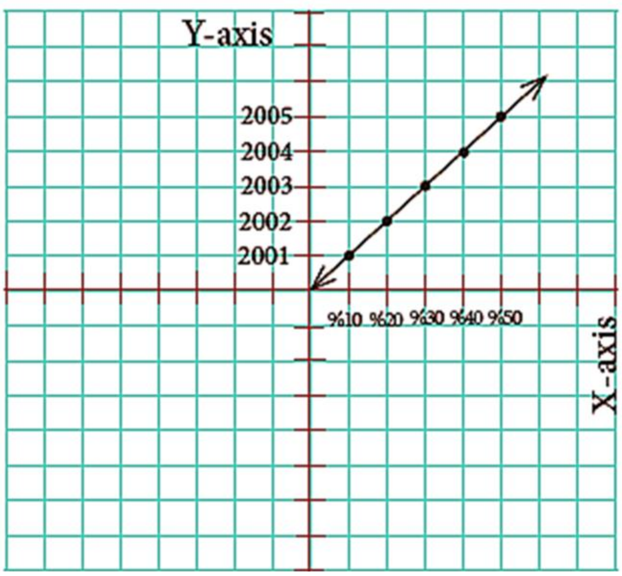
14) $y=\frac{x}{2}$

x	$y=\frac{x}{2}$	y	(x ،y)
٢	$y=\frac{2}{2}$	١	(٢ ، ١)
٠	$y=\frac{0}{2}$	٠	(٠ ، ٠)
-٢	$y=-\frac{2}{2}$	-١	(-٢ ، -١)



تدرب وحل مسائل حياتية :

١٩) احصاء : اراد صاحب شركة لصناعة الصابون ان يجري احصائية للأرباح التي حصلت عليها الشركة خلال ٥ سنين اذ وصلت الارباح الى ٥٠% ، اكتب جدول الدالة الخطية من المخطط البياني ثم اكتب المعادلة الخطية العامة لأرباح بالنسبة الى عدد السنوات ؟



النقطة (x ،y)	السنة y	الربح x
(١٠% ، ٢٠٠١)	٢٠٠١	١٠%
(٢٠% ، ٢٠٠٢)	٢٠٠٢	٢٠%
(٣٠% ، ٢٠٠٣)	٢٠٠٣	٣٠%
(٤٠% ، ٢٠٠٤)	٢٠٠٤	٤٠%
(٥٠% ، ٢٠٠٥)	٢٠٠٥	٥٠%

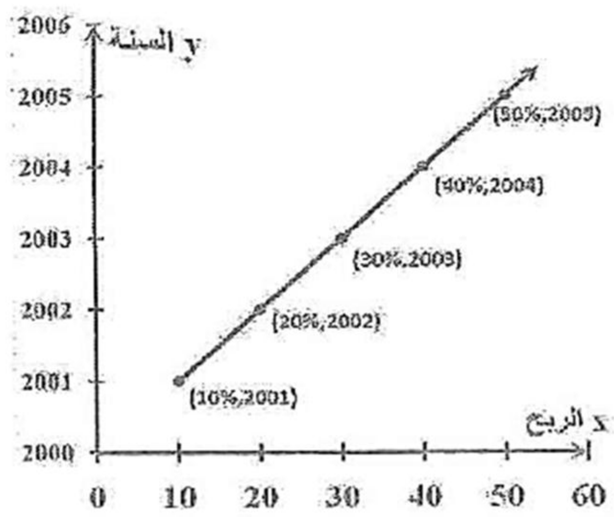
قاعدة الدالة $y = 10x +$ ٢٠٠٠

٢١) رياضة : سجلت بشرى عدد من النقط في نهاية لعبة كرة السلة بحيث كان عدد النقاط التي سجلتها بشرى في اللعبة السابقة اقل بـ ٥ نقاط من اللعبة الحالية انشيء جدول دالة خطية ثم مثل الدالة الخطية في المستوي الاحداثي ثم اكتب المعادلة الخطية العامة للدالة .

افرض ان عدد النقاط التي سجلتها في اللعبة السابقة = x

فأن عدد النقاط التي سجلتها في اللعبة الحالية = x + 5 = y وهي قاعدة الدالة او المعادلة الخطية للدالة .

النقطة	المخرجة	قاعدة الدالة	المدخلة
(x ، y)	y	Y = x + 5	x
(٠ ، ٥)	٥	Y = 0+ 5	٠
(١ ، ٦)	٦	Y =1 + 5	١
(٢ ، ٧)	٧	Y = 2 + 5	٢
(٣ ، ٨)	٨	Y = 3 + 5	٣

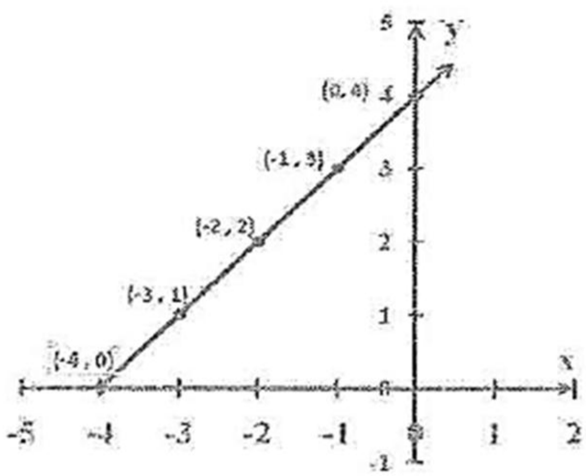


فكر :

٢٢) تحد : عين نقاط في المستوي الاحداثي تحقق الدالة الخطية الموضحة بالمخطط البياني المجاور ، ثم اكتب قاعدة الدالة النقاط هي :

(٠ ، ٤) ، (-١ ، ٣) ، (-٢ ، ٢) ، (- ٤ ، ٠)

قاعدة الدالة $y = x + 4$



٢٣) حس عددي : عدد طبيعي ضرب بـ ٣ ثم طرح منه ٥ بعد الضرب فكان الناتج الكلي مساوياً للعد ٧٠ ، ما المعادلة الخطية العامة للناتج الكلي بالنسبة للعدد الكلي ؟

$Y = 3x - 5$

$3x - 5 = 70$

$3x = 70 + 5$

$3x = 75 \rightarrow x = \frac{75}{3} = 25$

اكتب : مسألة حياتية تطابق الدالة الخطية العامة (معادلة مستقيم) $y = 5x - 3$

عدد طبيعي ضرب بـ ٥ ثم طرح منهُ ٣ بعد الضرب

مخزن لبيع صناديق ماء في كل يوم خمس ساعات وفق الدالة $y = 5x - 3$ فكم يبيع في كل ساعة . خلال اليوم كون جدول

الدالة وفق المعادلة الخطية .

x	y	(x ، y)
١	٢	(١ ، ٢)
٢	٧	(٢ ، ٧)
٣	١٢	(٣ ، ١٢)
٤	١٧	(٤ ، ١٧)
٥	٢٢	(٥ ، ٢٢)

$y = 5(1) - 3 = 2$

$y = 5(2) - 3 = 7$

$y = 5(3) - 3 = 12$

$y = 5(4) - 3 = 17$

$y = 5(5) - 3 = 22$

الدرس الرابع / الانعكاس والدوران في المستوي الاحداثي .
Refelction and Rotting in the coordinate plane

فكرة الدرس : تمثيل الانعكاس والدوران في المستوي الاحداثي .

المفردات : التحويل الهندسي والانعكاس والدوران وخط الانعكاس والمستوي الاحداثي واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

تعلم : يظهر في الصورة (ص ٥٠) شكل طائر تنعكس صورتهُ في الماء ، فأذا حددت سحر

ثلاث نقاط في الصورة الاصلية للطائر A , C , B فنجد النقاط التي يظهر ترتيبها في الماء

$\grave{A}$, $\grave{B}$, $\grave{C}$

- الانعكاس في المستوي الاحداثي :Refelction in the coordinate plane

التحويل الهندسي : وهو احد فروع الهندسة الذي يدرس تعاريف الاشكال الهندسية الذي يحول كل نقطة في المستوي الاحداثي الى نقطة اخرى في المستوي نفسهُ اي كل نقطة من الشكل الهندسي لها صورة في الانعكاس حول محور معين في المستوي نفسه . او الدوران حول نقطة معينة او الانسحاب .

الانعكاس : هو تحويل هندسي من شكل (ما) الى صورة مرآتهُ (المعكوسة) (حيث يحافظ الانعكاس على بنية الشكل) .

مثال ١ / أ – جد انعكاس النقاط A , B , C التي حددتها سحر .

الخطوة الاولى : نحدد الازواج المرتبة التي تمثل النقاط A , B , C فتكون :

A (2 , 2) , B (3 , 3) , C (4 , 2)

الخطوة الثانية : نحدد خط الانعكاس وليكن x – axis الاحداثي السيني ثم نحدد عدد الوحدات بين كل رأس وخط الانعكاس .

الخطوة الثالثة : نعين نقطة لكل رأس في الجهة الاخرى من خط الانعكاس بالبعد نفسه فيصبح $\grave{A}(2,-2)$, $\grave{B}(3,-3)$, $\grave{C}(4,-2)$ وبصورة عامة انعكاس اي نقطة عندما يكون خط الانعكاس محور السينات

هو : $R_x[(x,y)] = (x,-y)$

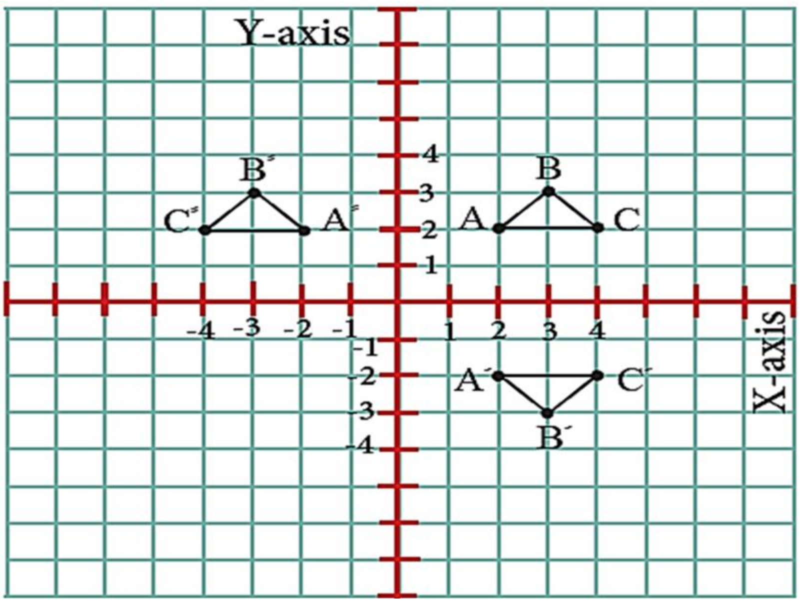
ب – جد انعكاس النقاط A (2 , 2) , B (3 , 3) , C (4 , 2) على محور y – axis محور الصادات

النقاط بعد الانعكاس هي $\grave{A}(2,-2)$, $\grave{B}(3,-3)$, $\grave{C}(4,-2)$.

وبصورة عامة انعكاس اي نقطة عندما يكون خط الانعكاس محور الصادات هو :

$R_y[(x,y)] = (-x,y)$

اي عندما يكون انعكاس النقطة (x ، y) في المحور السيني يتغير اشارة y أي تصبح النقطة (x ، -y) اما الانعكاس في محور الصادات فيتغير اشارة x فتصبح النقطة (-x ، y) . ويوجد انعكاس آخر في نقطة الأصل تتغير اشارة x ، y اي تصبح النقطة المنعكسة (-x ، - y) .



الدوران في المستوي الاحداثي : Rotting in the coordinate plane

لدى مراد ساعة مربعة الشكل معلقة على جدار غرفته اراد ان يجري دوراناً للساعة بـ $90°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عقارب الساعة .

ملاحظة : (يكون الدوران مع اتجاه عقارب الساعة او عكس اتجاه عقارب الساعة يذكر بالسؤال)

الدوران : هو تحويل هندسي يحول النقطة (٠ ، ٠) الى نفسها ويحول اي نقطة اخرى مثل A الى $\grave{A}$ حسب قياس الدوران واتجاهها .

مثال ٢ / ما صورة دوران النقطة (٢ ، ١) تحت تأثير الدوران ؟

أ – دوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عقارب الساعة . نطبق القاعدة التالية

$R_{90°}[(x,y)] = (y,-x)$ مثلاً $R_{90°}[(1,2)] = (2,-1)$

اي الدوران $90°$ مع اتجاه عقارب الساعة نبدل x بدل y ونضع y بدل x مع تغير اشارة x .

ب – دوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عكس عقارب الساعة نطبق القاعدة التالية :

$R_{90°}[(x,y)] = (-y,x)$ مثلاً $R_{90°}[(1,2)] = (-2,1)$

اي الدوران $90°$ عكس عقارب الساعة نبدل x بدل y ونضع y بدل x مع تغير اشارة y .

ج – دوران بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل مع اتجاه عقارب الساعة او عكس اتجاه عقارب الساعة نطبق القاعدة التالية :

$R_{180°}[(x,y)] = (-x,-y)$ مثلاً $R_{180°}[(1,2)] = (-2,-1)$

د – دوران بزاوية قياسها $270°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عقارب الساعة : نطبق القاعدة التالية : مشابهة (ب)

$R_{270°}[(x,y)] = (-y,x)$ مثلاً $R_{270°}[(1,2)] = (-2,1)$

هـ - دوران بزاوية قياسها °270 حول نقطة الأصل بأتجاه عكس عقارب الساعة : نطبق القاعدة التالية : مشابهة (أ)

$R_{270°}[(x,y)] = (y,-x)$ مثلاً $R_{270°}[(1,2)] = (2,-1)$

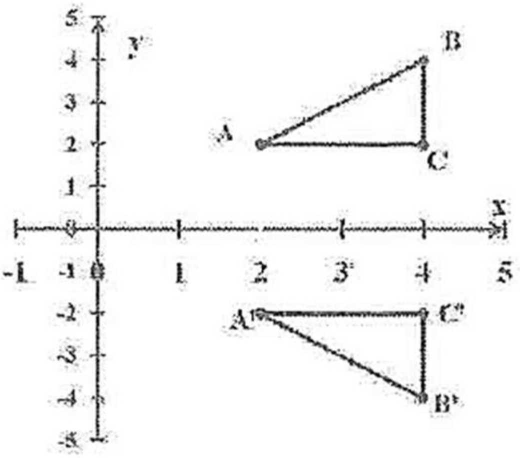
تأكد من فهمك : أنسخ الأشكال في المستوي الاحداثي ثم ارسم صورتهُ في الانعكاس حول خط الانعكاس اذا كانت النقاط :

1) A (2 , 2) , B (4 , 4) , C (4 , 2) x – axis

R_x [A(2 , 2)] = À (2 , -2)

R_x [B(4 , 4)] = B̀ (4 , - 4)

R_x [C (4 , 2)] = C̀ (4 , - 2)

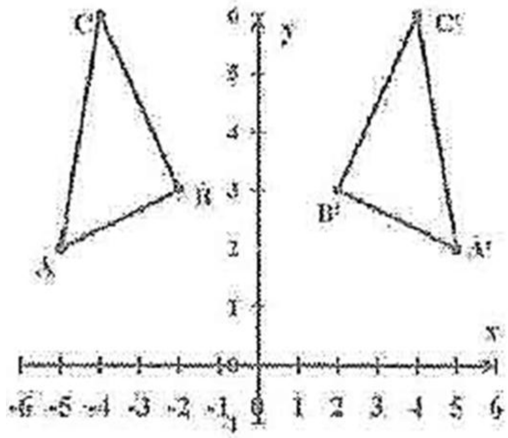


2) A (-5 , 2) , B (-2 , 3) , C (- 4 , 6) y – axis

R_y [A (-5 ,2)] = À (5 , 2)

R_y [B (-2 , 3)] = B̀ (2 , 3)

R_y [C (-4 , 6)] = C̀ (4 , 6)



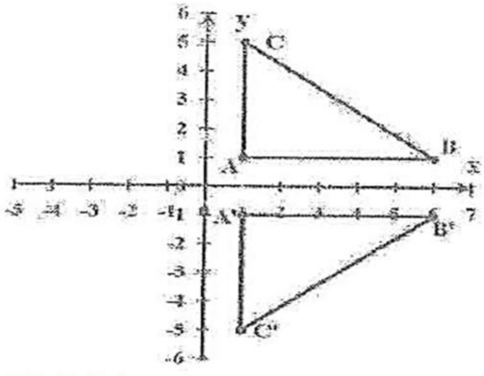
تدرب وحل التمرينات : انسخ الاشكال في المستوي الاحداثي ثم ارسم صورته في الانعكاس حول خط الانعكاس اذا كانت النقاط

9) A (1 , 1) , B (6 , 1) , C (1 , 5) x - axis

$R_x[A(1,1)] = \grave{A}(1,-1)$

$R_x[B(6,1)] = \grave{B}(6,-1)$

$R_x[C(1,5)] = \grave{C}(1,-5)$

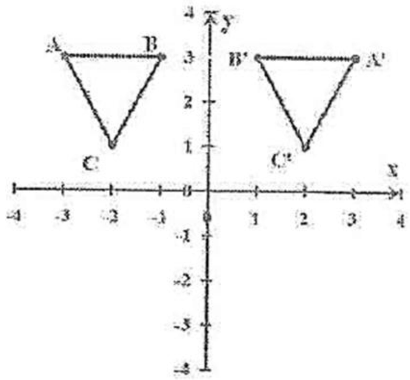


10) A (-3 , 3) , B (-1 , 3) , C (-2 , 1)   y - axis

$R_y[A(-3,3)] = \grave{A}(3,3)$

$R_y[B(-1,3)] = \grave{B}(1,3)$

$R_y[C(-2,1)] = \grave{C}(2,1)$



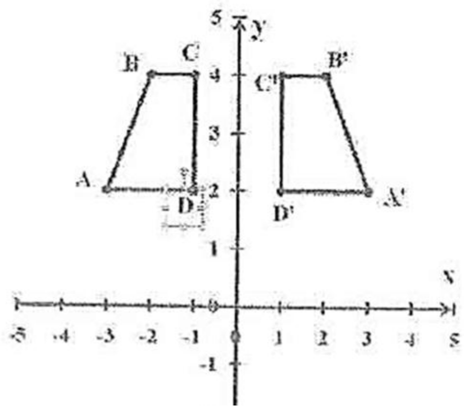
11) A (-3 , 2) , B (-2 , 4) , C (-1 , 4) , D (-1 , 2)   y – axis

$R_y[A(-3,2)] = \grave{A}(3,2)$

$R_y[B(-2,4)] = \grave{B}(2,4)$

$R_y[C(-1,4)] = \grave{C}(1,4)$

$R_y[D(-1,2)] = \grave{D}(1,2)$



اذا كانت النقطة (١ـ ، ٢) فجد صورتها :

١٢) تحت تأثير دوران $270°$ حول نقطة الاصل باتجاه عكس عقرب الساعة .

$R_{270°}[(x,y)] = (y,-x)$ لذلك $R_{270°}[(2,-1)] = (-1,-2)$

١٣) تحت تأثير دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عقرب الساعة .

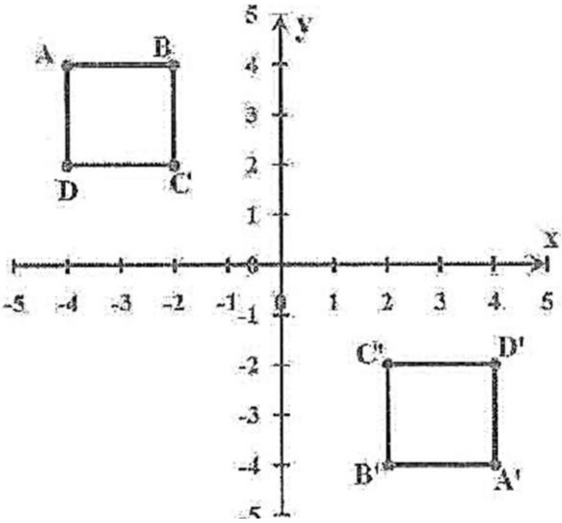
$R_{90°}[(x,y)] = (y,-x)$ لذلك $R_{90°}[(2,-1)] = (-1,-2)$

١٤) تحت تأثير دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل بأتجاه عكس عقرب الساعة .

$R_{180^\circ}[(x,y)] = (-x,-y)$ لذلك $R_{180^\circ}[(2,-1)] = (-2,1)$

١٥) اذا كان المثلث (١- ، ٣) ، (٤ ، ١-) ، (٣ ، ١) فجد صورة المثلث تحت تأثير دوران بزاوية °180 بأتجاه عكس عقارب الساعة ثم بأتجاه عقارب الساعة .

$R_{180^\circ}(x,y) = (-x,-y)$
$R_{180^\circ}(-4,4) = (4,-4)$
$R_{180^\circ}(-4,2) = (4,-2)$
$R_{180^\circ}(-2,4) = (2,-4)$
$R_{180^\circ}(-2,2) = (2,-2)$



٢١) اصحح الخطأ : يقول مهند ان انعكاس (٢ ، ٣-) حول محور السينات هو النقطة (٣ ، ٢-) صحح خطأ مهند .

انعكاس النقطة (٢ ، ٣-) حول محور السينات يتغير الاحداثي الصادي
لذلك جواب مهند خطأ والصحيح $R_x(-3,2) = (-3,-2)$

أكتب : خطوات ايجاد احداثيات صورة النقطة (٣ ، ٣-) في الانعكاس حول محور الصادات .

نطبق القاعدة التالية : $R_x(x,y) = (-x,y)$

اي نغير اشارة الاحداثي السيني x – axis $R_y(-3,3) = (3,3)$

الدرس الخامس / الانسحاب في المستوي الاحداثي :
Translation in the coordinate plane

فكرة الدرس : الانسحاب في المستوي الاحداثي .

المفردات : الانسحاب والمستوي الاحداثي .

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس .

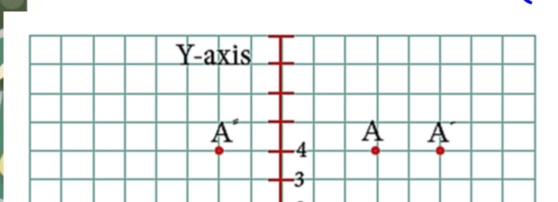
الانسحاب : هو انتقال الشكل من موقع الى آخر ، دون تدويره ، ولا ينتج عن ذلك تغير في قياسات شكله .

- الانسحاب الى اليمين او الى اليسار Translation to Right or left
- الانسحاب الى الاعلى او الى الاسفل Translation to up or Down

مثال ١ / جد احداثيات النقطة (٤ ، ٣) A بالانسحاب :

i) وحدتان الى اليمين   ii) ٥ وحدات الى اليسار

i) تحرك النقطة (٤ ، ٣) A وحدتين نحو اليمين نحصل على ، $A(3+2)$



$\grave{A}(5,4)$ = (٤ (يعني اضافة على x) .

ii) تحرك النقطة (٣ ، ٤) A خمس وحدات نحو اليسار تحصل على

(٤ ، ٥) $\grave{A}$ = (٤ ، ٥ – ٣) A (يعني تطرح من x) وبصورة عامة

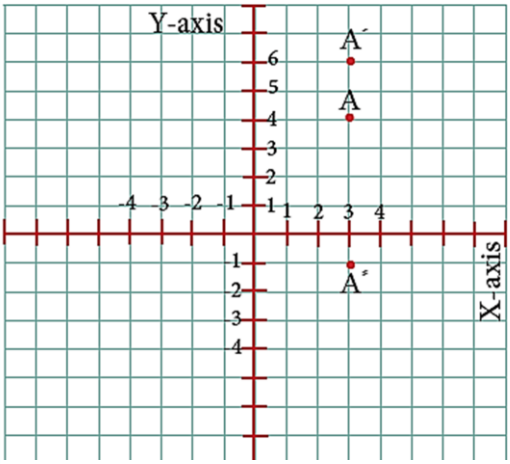
انسحاب بموازاة محور السينات (يمين او يسار)

$T_x(x,y) = (x+a, y)$ الى اليمين تضيف يعني ٠ < a واذا

لليسار تطرح يعني ٠ < a $T_x = [(x,y)]$

مثال ٢ / جد احداثيات النقطة (٣ ، ٤) A بالانسحاب :

i) وحدتان الى الاعلى   ii) وحدتان الى الأسفل



i) تحرك النقطة (٣ ، ٤) A وحدتان الى الاعلى تحصل على

$\grave{a}(5,4)$ = (٢ + ٤ ، ٣) A (اضافة وحدتين على y)

ii) تحرك النقطة (٣ ، ٤) A خمسة وحدات الى الاسفل تحصل على

(٣ ، -١) $\grave{A}$ = (٥ – ٤ ، ٣) A (طرح ٥ وحدات من y)

بصورة عامة : انسحاب (x , y) بموازاة محور الصادات

$T_y(x,y) = (x+a, y)$

اذا كان الانسحاب نحو الاعلى يضاف وحدات موجبة ٠ < a

واذا للأسفل يطرح من y وحدات سالبة ٠ > a

- الانسحاب المائل : Translation Italic

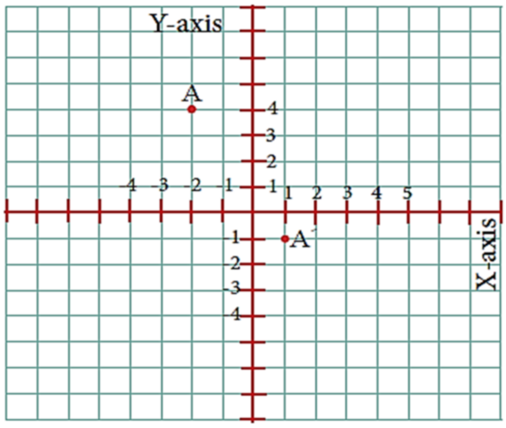
تعلمت الانسحاب بموازاة المحور السيني او المحور الصادي . ويوجد انسحاب من شكل آخر هو الانسحاب المائل الذي لا يوازي اي من المحورين . هنا الاضافة او الطرح يكون على x و y .

$T_{xy}\,(x , y) = (x + a , y + b)$

مثال ٣ / جد احداثيات النقطة (٤ ، ٢-) A بالانسحاب ٣ وحدات الى اليمين و ٥ وحدات نحو الاسفل .

تحرك النقطة (٤ ، ٢-) A ثلاث وحدات نحو اليمين وخمسة وحدات نحو الاسفل فنحصل على :

$T_{xy}\,[A(-2 , 4) = \grave{A}(-2 + 3 , 4 - 5) = \grave{A}(1 , -1)$

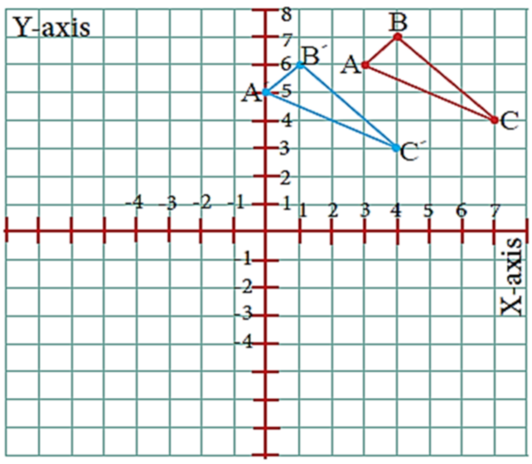


مثال ٤ / المثلث ABC مثلث رؤوسه $A(3 , 6) , B(4 , 7) , C(7 , 4)$ جد انسحابه ٣ وحدات نحو اليسار ، ووحدة نحو الاسفل .

$T_{xy}\,[A(3 , 6)] = \grave{A}(3 - 3 , 6 - 1) = \grave{A}(0 , 5)$

$T_{xy}\,[B(4 , 7)] = \grave{B}(4 - 3 , 7 - 1) = \grave{B}(1 , 6)$

$T_{xy}\,[C(7 , 4)] = \grave{C}(7 - 3 , 4 - 1) = \grave{C}(4 , 3)$

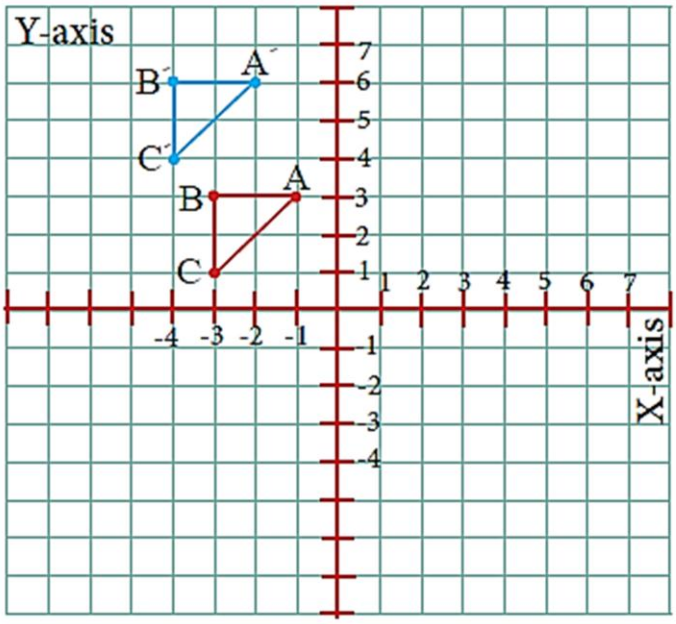


مثال ٥ / المثلث ABC مثلث رؤوسه $A(-1 , 3) , B(-3 , 3) , C(-3 , 1)$ جد انسحابه وحدة واحدة نحو اليسار وثلاث وحدات نحو الاعلى .

T_{xy} [A (-1 , 3)] = $\grave{A}$(-1 – 1 , 3 + 3) = $\grave{A}$ (-2 , 6)

T_{xy} [B (-3 , 3)] = $\grave{B}$(-3 – 1 , 3 + 3) = $\grave{B}$ (-4 , 6)

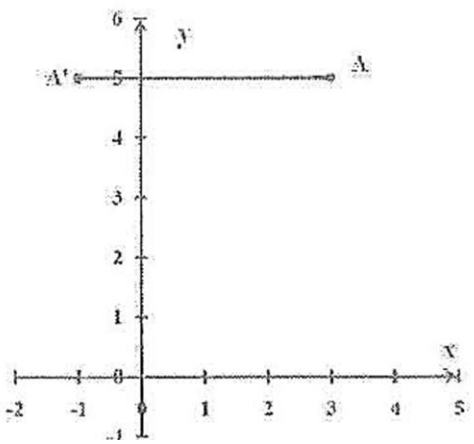
T_{xy} [C (-3 , 1)] = $\grave{C}$(-3 – 1 , 1 + 3) = $\grave{C}$ (-4 , 4)



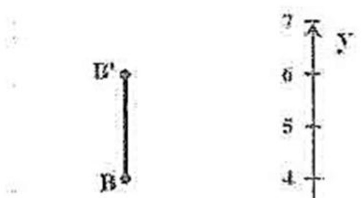
تأكد من فهمك / مثل النقاط التالية وصورها في المستوي الاحداثي :

١) بأنسحاب النقطة A(3 , 5) اربع وحدات نحو اليسار

T_x [A (3 , 5)] = $\grave{A}$(3 – 4 , 5) = $\grave{A}$ (-1 , 5)



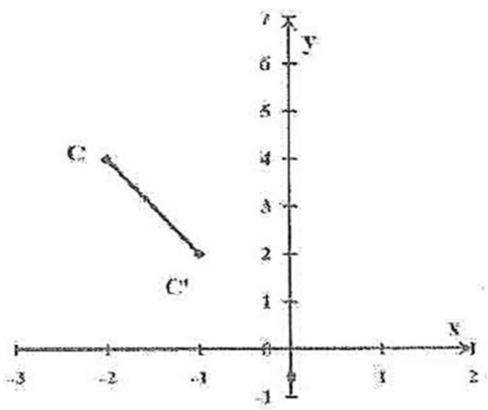
٢) بأنسحاب النقطة B (٤ ، -٢) وحدتان نحو الاعلى



$T_y [B(-2, 4)] = \grave{B}(-2, 6)$

٣) بأنسحاب النقطة (٤ ، ٢-) C وحدة واحدة نحو اليمين ووحدتين نحو الاسفل .

$T_{xy} [C(-2, 4)] = \grave{C}(-2 + 1, 4 - 3) = \grave{C}(-1, 2)$

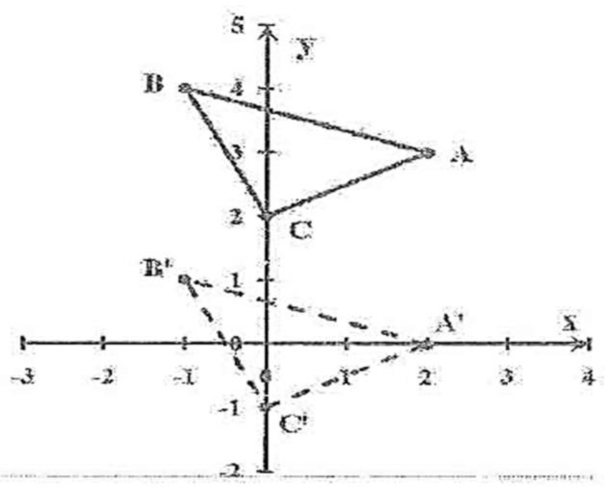


٤) جد انسحاب المثلث ABC اذ A (2 , 3) , B (-1 , 4) , C (0 , 2) بمقدار ثلاثة وحدات نحو الاسفل ثم مثلهُ وصورتهُ في المستوي الاحداثي .

$T_y [A(2, 3)] = \grave{A}(2, 0)$

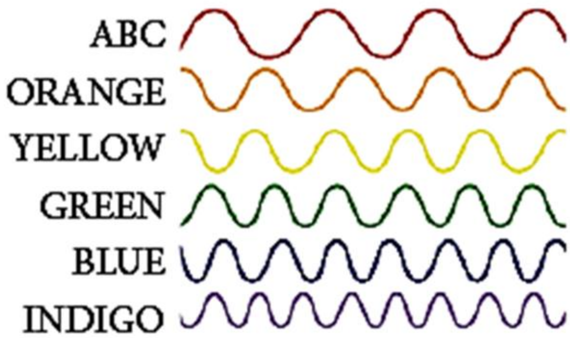
$T_y [B(-1, 4)] = \grave{B}(-1, 1)$

$T_y [C(0, 2)] = \grave{C}(0, -1)$



١٢) موجات الضوء : في الشكل موجات للضوء هل هناك عملية انسحاب للموجة ABC وكم وحدة من اليسار الى اليمين ؟

نعم يوجد انسحاب للموجة من اليسار الى اليمين وعددها ٣



١٣) موجات : هناك موجات تحدث في البحر فاذا كانت النقطة (٥ ، ٢-) على رأس الموجة اجري انسحاباً للموجة فتكونت الصورة (٢ ، ٨) فكم واحدة اجري الانسحاب المائل وما هي جهات الانسحاب ؟

على الاحداثي السيني $10 = 8 - (-2)$

على الاحداثي الصادي $-3 = 2 - 5$

∴ الانسحاب المائل ١٠ وحدات لليمين وثلاث وحدات للاسفل على النقطة (٥ ، ٢-) .

١٤) رسم : رسمت رغد سلسلة جبلية من اربعة جبال فرسمت الجبل الاول وارادت ان ترسم الجبل الثاني بصورة انسحاب للجبل الاول بوحدتين الى اليمين ووحدة الى الاعلى ، فما صورة انسحاب الجبل اذا علمت ان نقاط الجبل الاول

$A(3,3), B(3,0), C(0,0)$ ؟

$T_{xy}[A(3,3)] = \grave{A}(3+2, 3+1) = \grave{A}(5,4)$

$T_{xy}[B(3,0)] = \grave{B}(3+2, 0+1) = \grave{B}(5,1)$

$T_{xy}[C(0,0)] = \grave{C}(0+2, 0+1) = \grave{C}(2,1)$

فكر :

١٥) ما احداثيات النقطة (x , y) بالانسحاب m وحدة الى اليمين و n وحدة الى الاعلى .

$$T_{xy}(x, y) = (x+m, y+n)$$

١٦) استنتاج : اجري انسحاباً فكانت النقطة (٦ ، ٤-) على شكل ما ، ثم انسحاباً اخر للصورة الناتجة فكانت النقطة

(٦- ، ٤) دون استعمال الرسم ؟ ما هي الصورة النهائية بعد اجراء انسحابين ؟ فسر اجابتك .

الصورة النهائية للنقطة بعد اجراء انسحابين هي (٦ - ، ٤) حيث تعتبر النقطة (٦ ، ٤-) هي صورة النقطة الاولى وتعتبر نقطة جديدة تجد صورتها بانسحاب وقد ظهرت صورتها بالنقطة الاخيرة (٦- ، ٤) .

١٧) هندسة : عند اجراء انسحاب للمعين ABCD (شكل رباعي) الذي رؤوسه :

$A(2,1), B(3,-3), C(2,-4), D(1,-3)$ كان احداثي الرأس A بعد الانسحاب $\grave{A}$ (٣- ، ٤) صف

$\grave{D}, \grave{C}, \grave{B}$ بعد الانسحاب .

بما ان (٣- ، ٤) $\grave{A}$ صورة (١ ، ٢) A بالانسحاب فأن ٢ = ٢ – ٤ اي وحدتين لليمين

ووحدتين للاسفل ٢- = (١-) – ٣ - .

$T_{xy}[B(3,-3)] = \grave{B}(3+2, -3-2) = \grave{B}(5,-5)$

$T_{xy}[C(2,-4)] = \grave{C}(2+2, -4-2) = \grave{C}(4,-6)$

$T_{xy}[D(1,-3)] = \grave{D}(1+2, -3-2) = \grave{D}(3,-5)$

$T_{xy}[A(2,-1)] = \grave{A}(2+2, 1-2) = \grave{A}(4,-3)$ $A(2,-1)$

Chapter ٧ الفصل السابع

Statistics and Probabilities / الاحصاء والاحتمالات

الدرس الاول : مقياس النزعة المركزية والمدى .

الدرس الثاني : تمثيل البيانات ببيان الشاربين .

الدرس الثالث : التجربة العشوائية .

الدرس الرابع : الحدث .

الدرس الخامس : الأحتمالات .

الدرس السادس : الأحتمال التجريبي والاحتمال النظري .

الدرس السابع : خطة حل المسألة (تمثيل المسألة) .

(الاختبار القبلي)

اختر الكلمة المناسبة من المفردات المجاورة لكي تكون جملة صحيحة :-

١- المدى هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة في المجموعة المعطاة . — المنوال

٢- المنوال هي القيمة التي تتكرر اكثر من غيرها في المجموعة المعطاة . — الوسيط

٣- الوسيط هي القيمة التي تتوسط مجموعة البيانات المعطاة . — المدى

٤- الوسط الحسابي هي القيمة التي تساوي مجموع القيم المعطاة مقسوماً على عددها . — الوسط الحسابي

رتب ما يلي تصاعدياً (من الاصغر الى الاكبر)

٥) ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٩ ، ٨ ، ٨ ، ٦، ٩ .

الترتيب من الاصغر الى الاكبر : ٩٠ ، ٩٠ ، ٩٧ ، ٩٧ ، ٩٧ ، ٩٩ ، ٩٩ ، ١٠٠

اختر الاجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي :

٧) بغداد عاصمة جمهورية العراق (ممكن ، مؤكد) . الجواب مؤكد .

٨) احتمال سحب كرة حمراء من كيس فيه كرات بيض فقط هي (٥٠ % ، ٠ %) . الجواب ٠ % .

٩) بطاقات مرقمة من ١ الى ٩ نسبة البطاقات التي تحمل ارقام زوجية هي (اقل من ٥٠ % ، ٠ %)

الجواب / اقل من ٥٠ %

١٠) اذا كان العدد ٣ يمثل الساق والعدد ٤ يمثل الورقة فأن العدد هو (٤٣ ، ٣٤) . الجواب / ٣٤

١١) مثل البيانات في الجدول المجاور بطريقة الساق والاوراق

٦٥	٧٦	٦٨	٧٠	٦٥
٦٩	٧١	٧٤	٦٩	٧٢
٦٨	٧٢	٧١	٦٥	٧٦

الساق	الاوراق
٦	5 5 5 8 8 9 9
٧	0 1 1 2 2 4 6 6

جد الوسيط والمنوال والمدى لكل مما يأتي :

١٢) ٢ ، ٦ ، ١ ، ٨ ، ٣ ، ٢ ، ٠ ، ٥ ، ٤

نرتب القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ تصاعدياً .

العدد ٣ يمثل الوسيط لأنه وسط القيم

المنوال = ٢ لأنه اكثر تكراراً .

المدى = ٨ ــ ٠ = ٨

١٣) ٧٧ ، ٧١ ، ١٢ ، ١٥ ، ٥٥ ، ٣٠ ، ٨٧

الترتيب ١٢ ، ١٥ ، ٣٠ ، ٥٥ ، ٧١ ، ٧٧ ، ٨٧

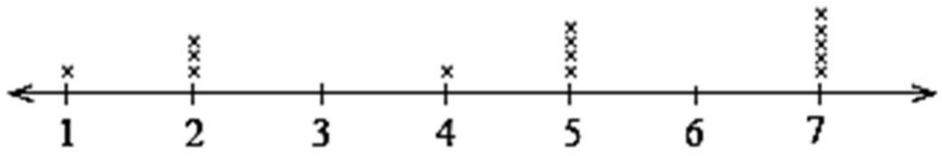
الوسيط = ٥٥ لأنه اوسط القيم

المنوال = لا يوجد لأن لا يوجد قيمة مكررة .

المدى = ٨٧ ـ ١٢ = ٧٥ .

مثل الاعداد بجدول تكراري

التكرار	العدد
١	١
٣	٢
٠	٣
١	٤
٤	٥
٠	٦
٥	٧



الدرس الاول / مقياس النزعة المركزية والمدى
Admeasure of Central Tendency and Range

فكرة الدرس : ايجاد مقياس النزعة المركزية والمدى مستخدماً التمثيل بالساق والاوراق .

المفردات : المتوسط ، الساق ، الوسيط ، الورقة ، المنوال ، المدى .

واليك المثال التالي : تعلم

يبين الجدول المجاور درجات بعض طلاب الصف الثاني متوسط في مادة الرياضيات اوجد :

١ـ المدى ٢ ـ الوسيط ٣ـ المنوال ٤ـ المتوسط الحسابي

درجات الطلاب				
٩٨	٩٠	٨٥	٩٠	٩٥
٧٩	٧٩	٩٠	٨١	٨٨
٧٥	٩٤	٩٩	٩٠	٧٢

- تعلمت سابقاً تمثيل البيانات بطريقة الساق والورقة لمجموعة واحدة . في هذا الدرس سنتعلم تمثيل مجموعتين بطريقة الساق والورقة والمقارنة بينهما ويمكنك ايجاد مقياس التشتت والنزعة المركزية من خلال التمثيل بالساق والورقة .

ملاحظة : (الساق) يمثل العشرات من العدد و (الاوراق) يمثل الآحاد من العدد

مثال ١ : استعمل التمثيل بالساق والورقة للاجابة عن فقرة تعلم .

خطوة ١ / استعمل التمثيل بالساق والورقة لعرض البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً .

الاوراق (مرتبة الاحاد)	الساق (مرتبة العشرات)
2 5 9 9	٧
1 5 8	٨
0 0 0 0 4 5 8 9	٩

خطوة ٢ / استعمل التمثيل بالساق والورقة للاجابة عن :

١) القيمة الكبرى = ٩٩ القيمة الصغرى = ٧٢

المدى = القيمة الكبرى – القيمة الصغرى

المدى = ٩٩ – ٧٢ = ٢٧

٢) الوسيط = ٩٠ (القيمة الواقعة في منتصف البيانات في الجدول الساق والورقة)

اي بعد ترتيب القيم من الاصغر الى الاكبر .

٣) المنوال = ٩٠ (هي الدرجة الاكثر تكراراً)

الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{72+75+\cdots+99}{15} = 87$

يمكن مقارنة مجموعتين من البيانات بالتمثيل المزدوج للساق والورقة .

مثال ٢ / يبين الجدول المجاور تمثيل الساق والورقة لدرجات بعض الطلاب في مادتي الرياضيات والفيزياء .

الورقة (الفيزياء)	الساق	الورقة (الرياضيات)
8 5 1	7	3
9 8 4 4 2	8	0 2 3 3 7 8
9 6 5 3 0	9	1 0 0 5 6 7

i) اي الموضوعين مداهُ اكبر ؟

مدى المجموعة الرياضيات = ٩٧ ــ ٧٣ = ٢٤

مدى مجموعة الفيزياء = ٩٩ ــ ٧١ = ٢٨

لذا مدى مجموعة الفيزياء اكبر من مدى مجموعة الرياضيات

ii) وسيط مجموعة الرياضيات هو ٨٨ اما الوسيط مجموعة الفيزياء فهو ٨٨ ايضا .

iii) ما اعلى درجة في الموضوع الرياضيات ؟ ٩٧

iv) ما اقل درجة في موضوع الفيزياء ؟ ٧١

مثال ٣ / اجريت مقارنة على المسافة التي تقطعها ٩ سيارات بالكيلومترات داخل المدينة وعلى الطريق العام فكان الجدول ادناه .

المسافة بالكيلومترات									
داخل المدينة	34	31	23	19	20	31	41	23	28
الطريق العام	27	30	32	28	38	41	32	38	28

i) انشئ التمثيل المزدوج بالساق والورقة بالبيانات اعلاه

ii) جد الوسيط والمنوال والمدى لكل منها .

الطريق العام	الساق	داخل المدينة

	١	٩
788	٢	8330
02288	٣	٤ ١ ١
١	٤	١

المقياس	الطريق العام	داخل المدينة
الوسيط	٣٢	٢٨
المنوال	٢٨ ، ٣٢ ، ٣٨	٣١ ، ٣٢
المدى	١٤ = ٢٧ – ٤١	٢٢ = ١٩ – ٤١

iii) اي المجموعتين مداه اكبر ؟

مجموعة السيارات داخل المدينة = ٢٢ مجموعة السيارات الطريق العام مداها = ١٤
لذا مجموعة السيارات داخل المدينة مداها اكبر .

تأكد من فهمك :

للتذكير : الساق والورقة : الساق (مرتبة العشرات) والورقة (مرتبة الاحاد)
المنوال : هي القيمة الاكثر تكرارا من بين القيم واذا وجدت قيمتين نفس التكرار تسمى المنوال الاول والمنوال الثاني . واذا لم تكرر القيم سوى مرة واحدة لا يوجد منوال .
الوسيط : بعد ترتيب القيم نأخذ القيمة الوسطى تسمى (الوسيط) واذا كان عدد القيم زوجياً فالوسيط هو معدل الوسطين
(مجموعها ÷ ٢)
الوسط الحسابي : مجموع القيم ÷ عددها .
المدى = اكبر القيم – اصغرها .
الجدول المجاور يبين درجات الحرارة لبعض الايام

درجات الحرارة سليليزية				
24	30	36	32	38
2	31	35	13	15
38	32	38	38	13

١) استعمل التمثيل بالساق والورقة لتمثيل البيانات

نرتب القيم تصاعدياً : ٢ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٣٠ ، ٣١، ٣٢ ، ٣٢ ، ٣٢ .
٣٥ ، ٣٦ ، ٣٨ ، ٣٨ ، ٣٨ ، ٣٨ .

٢) اوجد المدى والوسيط والمنوال للبيانات

المدى = اكبر قيمة – اصغر قيمة = ٣٨ – ٢ = ٣٦

الوسيط = ٣٢ وسط القيم والمنوال = ٣٨ لأنها اكثر تكرار

٣) اوجد: الوسط الحسابي للبيانات

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{38+\cdots+13+13+2}{15}$$

= ٢٧ . ٦٦

الساق	الورقة
0	2
1	3 3 5
2	4
3	0 1 2 2 5 6 8 8 8 8

تدرب وحل التمرينات : استعمل تمثيل الساق والورقة المجاور وجد ما يأتي :

الساق	الورقة
0	8 9
1	0 2 4 6 8
2	7
3	4

٩) المدى ، الوسيط ، المنوال للبيانات .

المدى = ٣٤ ــ ٨ = ٢٦

الوسيط = ١٤ وسط القيم

المنوال = لايوجد لعدم تكرار اي رقم

١٠) الوسط الحسابي للبيانات $= \frac{34+27+18+16+14+12+10+9+8}{9} = 16.44$

يمثل الجدول ادناه عدد زوار المتحف البغدادي في اسبوعين متتاليين :

الاسبوع الاول	الساق	الاسبوع الثاني
6	3	0

١١) استعمل التمثيل المزدوج بالساق والورقة لتمثيل البيانات .

١٢) اوجد : المدى (اسبوع الاول) = ٧٠ – ٣٦ = ٣٤

المدى (اسبوع الثاني) = ٧٠ – ٣٠ = ٤٠

الوسيط = ٥٨ اسبوع الاول ، الوسيط = ٥٢ اسبوع الثاني

المنوال = لا يوجد في كلا الحالتين

١٣) الوسط الحسابي (اسبوع الاول) = $\frac{382}{7} = 54.5$ (اسبوع الثاني) = $\frac{367}{7} = 52.4$ متقارب

تدرب وحل مسائل حياتية :

سرعة : الجدول المجاور يبين سرعة بعض السيارات على الطرق

سرعة السيارات Km/h				
69	65	71	76	65
59	74	68	74	72
70	65	69	71	68

١٤) استعمل التمثيل بالساق والاوراق لتمثيل البيانات .

١٥) جد المدى ، الوسيط ، المنوال للبيانات

المدى = ٧٦ – ٥٩ = ١٧

الوسيط = ٦٩

المنوال = ٦٥

١٦) الوسط الحسابي = $\frac{70+\cdots+76+65}{15} = 69.1$

كمية الدهن في فطائر اللحم والدجاج%		
دجاج	الساق	لحم
1	0	8 9
9 5	1	0 2 4 6 7
7 6 5	2	7
4 3	3	
1	4	0

الدرس الثاني / تمثيل البيانات ببيان الشاربين

فكرة الدرس : تمثيل البيانات ببيان الشاربين ومقارنة بين الشاربين .

المفردات : بيان الشاربين – الربيع الاعلى – الربيع الادنى – المدى الربيعي .

واليك المثال التالي :

تعلم : سجل احد لاعبي كرة السلة في كل مباراة النقاط التالية :

٣٥ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٨ ، ٤٦ ، ٤٦ ، ٤٢ ، ٣٧ ، ٤٠

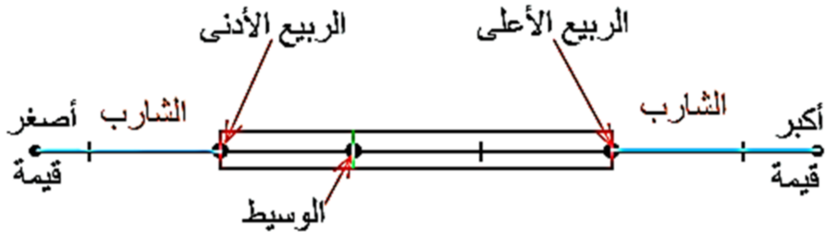
كيف امثل البيانات ببيان الشاربين ؟

لكي تنشئ بيان الشاربين يجب تقسيم البيانات بعد ترتيبها الى اربعة اقسام باستعمال الربيعات ، الوسيط او الربيع الاوسط يقسم البيانات الى نصف الادنى ونصف اعلى .

الوسيط في لنصف الادنى : هو الربيع الادنى .

الوسيط في النصف الاعلى : هو الربيع الاعلى .

هذه التقسيمات توزع على مستقيم الاعداد .



مثال ١ / انشئ بيان شاربين للبيانات الاتية :

٣٥ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٨ ، ٤٦ ، ٤٦ ، ٤٢ ، ٣٧ ، ٤٠

الخطوة (١) : رتب البيانات تصاعدياً . حدد القيمة الصغرى والكبرى ثم الوسيط وبعدها الربيع الادنى والربيع الاعلى .

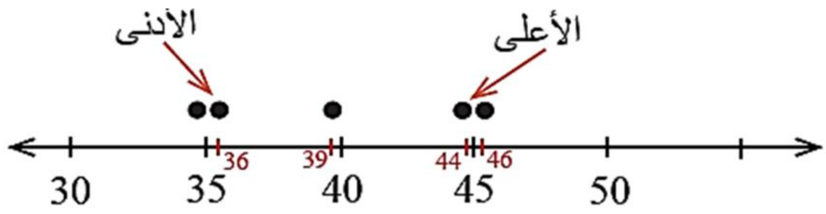
أصغر قيمة 35 ، 35 ، 37 ، 37 ، 38 ، 40 ، 40 ، 42 ، 46 ، 46 أكبر قيمة

الربيع الأدنى: $\frac{35+37}{2}=36$

الوسيط: $\frac{40+38}{2}=39$

الربيع الأعلى: $\frac{42+46}{2}=44$

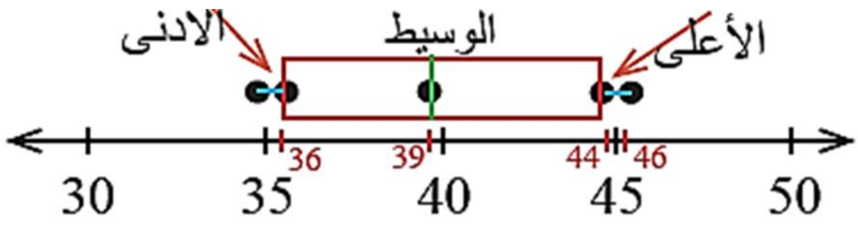
الخطوة (٢): ارسم مستقيم الاعداد وضع نقطة فوقهُ لكل قيمة وجدت في الخطوة (١)



الخطوة (٣) : ارسم مستطيلا بدءاً من الربيع الادنى وانتهاء عند الربيع الاعلى ، وارسم داخل المستطيل خط مستقيم يدل على الوسيط ، ثم ارسم الشاربين من قيمة الصغرى والقيمة الكبرى حتى المستطيل .

المدى الربيعي = الربيع الاعلى – الربيع الادنى

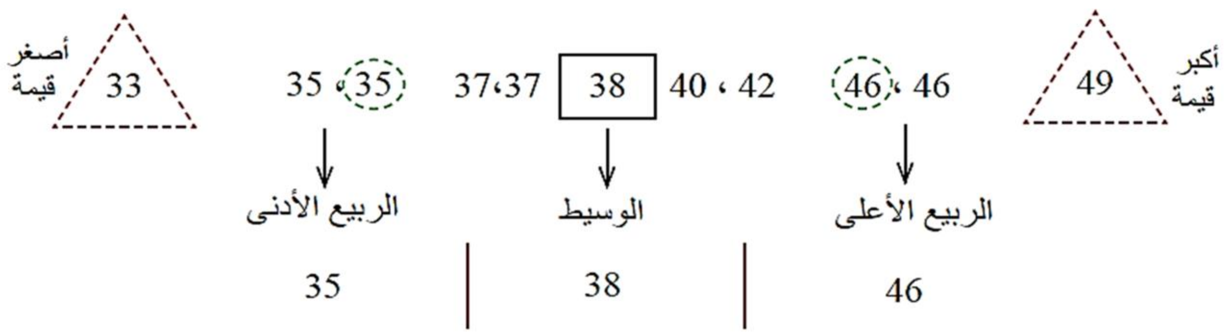
المدى الربيعي = ٣٦ – ٤٤ = ٨ (يساوي طول المستطيل)



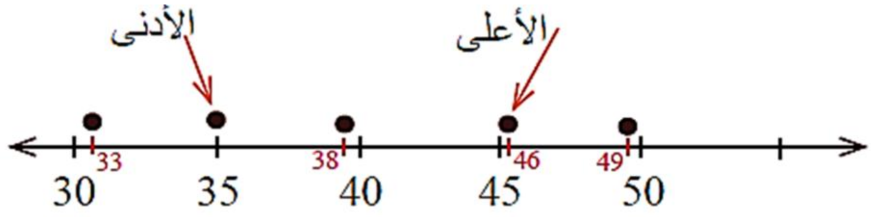
مثال ٢ / انشئ بيان شاربين للبيانات الاتية :

٣٣ ، ٣٥ ، ٣٧ ، ٤٩ ، ٣٨ ، ٤٦ ، ٤٢ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٤٦ ، ٣٧

رتب البيانات تصاعدياً ، حدد القمة الصغرى والكبرى ثم الوسيط وبعدها الربيع الادنى والربيع الاعلى .



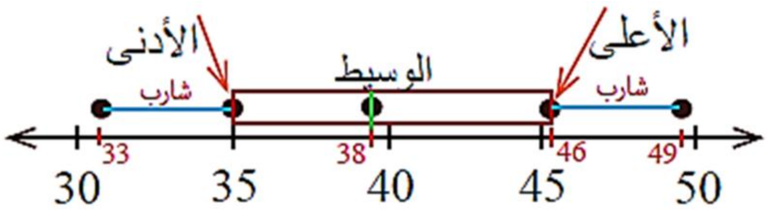
ارسم مستقيم الاعداد وضع فوقهُ نقطة لكل قيمة .



ارسم مستطيلاً من الربيع الادنى وانتهاء عند الربيع الاعلى ، ارسم داخل المستطيل خط مستقيم يدل على الوسيط ثم ارسم الشاربين من قيمة الصغرى والكبرى حتى المستطيل .

المدى الربيعي = الربيع الاعلى _ الربيع الادنى

١١= ٣٥ _ ٤٦ (يساوي طول المستطيل)



خلاصة ايجاد الشاربين :

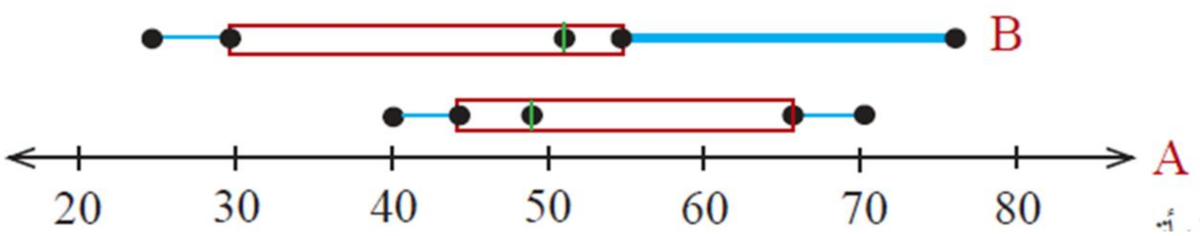
١) نرتب القيم تصاعدياً من اليسار الى اليمين ثم نحدد اصغر قيمة واكبر قيمة والوسيط . فالقيم الاربعة الاولى قبل الوسيط

(الربيع الادنى) نجد الوسيط لها والقيم الاربعة الاخيرة (الربيع الاعلى) نجد الوسيط لها . ثم نعين هذهِ النقاط على خط الاعداد (خمس نقاط) نرسم مستطيل حدودهُ قيمة الوسيط للربيع الادنى والاعلى وطولهُ هي المسافة من الربيع الادنى الى الاعلى ويسمى المدى الربيعي ونعين الوسيط وسط هذا المستطيل . نرسم مستقيم من القيمة الاصغر الى الوسيط الادنى كذلك من القيمة الاكبر الى الوسيط الاعلى تسمى شاربين .

_ المقارنة باستعمال الشاربين :Comperrer by using whisker

يمكنك استعمال بيان الشاربين للمقارنة بين مجموعتين في البيانات وذلك بوضع احدهما بمحاذاة الآخر .

مثال ٣ / يبين بيان الشاربين ادناه كيف بيانات شركتي B ، A لأنتاج نوع خاص من ادوات المطبخ .



من خلال الشكل اعلاه اجب عما ياتي :

- اي الشركتين وسيطهما اكبر ؟ وسيط الشركة B اكبر من وسيط الشركة A
- اي الشركتين لديها مدى ربيعي اكبر ؟ المدى الربيعي للشركة B هو الاكبر .

حيث طول المستطيل في بيان الشاربين يمثل المدى الربيعي .

- اي الشركتين ستنتج ادوات اكثر ؟

المدى والمدى الربيعي في بيان الشركة A هما اصغر من المدى والمدى الربيعي في بيان الشركة B . وهذا يعني ان التغيير في بيانات الشركة A اقل من التغيير في بيانات الشركة B . لذا انتاج شركة A ممكن ان يكون الاكثر .

تأكد من فهمك / انشئ بيان شاربين للبيانات الآتية :

١) ١٧ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٩ ، ١٧ ، ٢١ ، ١٩ ، ٢٨ ، ٢٠

نرتب القيم تصاعدياً

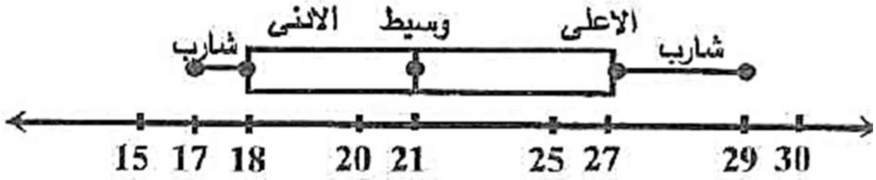
17 , 17,19 , 20, $\boxed{21}$, 23 , 26,28 , 29 اكبر قيمة

الربيع الادنى $\frac{17+19}{2} = 18$

الوسيط 21

الربيع الاعلى $\frac{26+28}{2} = 27$

نتبع نفس الخطوات في المثال ١ ، ٢



٢) ٨١ ، ٧٦ ، ٧٣ ، ٧٢ ، ٧٢ ، ٧٥ ، ٧٩ ، ٨٥

نرتب القيم تصاعدياً

اصغر قيمة 72 , 72 , 73 , 75 , 76 , 79 , 81 , 85

الربيع الادنى: 72

الوسيط: $\frac{75+76}{2} = 75.5$

الربيع الاعلى: 81

٣) ١٠ ، ٢٥ ، ١٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ٢٣ ، ١٧ ، ٢٦ ، ١٦

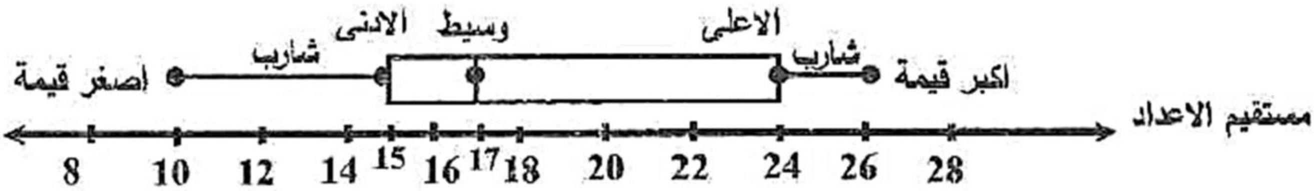
نرتب القيم تصاعدياً :

اصغر قيمة 10 , 14 , 16 , 17 , $\boxed{17}$, 21 , 23 , 25 , 26 اكبر قيمة

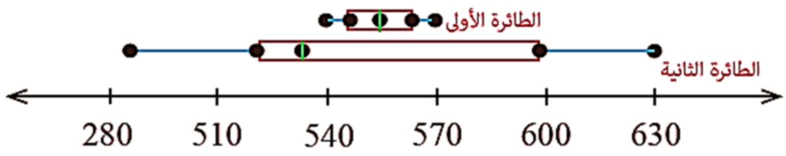
الربيع الادنى: $\frac{14+16}{2} = 15$

الوسيط: 17

الربيع الاعلى: $\frac{23+25}{2} = 24$



لدى محمد ومهند طائرتان ورقيتان ، يمثل بياناً الشاربين المسافات التي ارتفعت بها كل من الطائرتين .



٤) اي طائرة وسيطها اقل ؟ الطائرة الثانية

٥) اي طائرة مداها الربيعي اكبر ؟

الطائرة الثانية

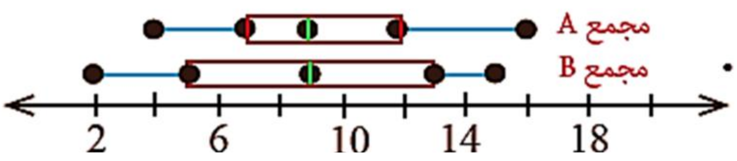
٦) اي طائرة يبدو انها تطير مسافة اقل ؟ الطائرة الاولى

يمثل بياناً الشاربين عند زوار مجمعين للتسويق B ، A .

٧) قارن بين الوسيطين وبين المديين .

نفس الوسيط للمجمع A وللمجمع B ، والمدى الربيعي للمجمع B اكبر من المجمع A .

٨) قارن بين المدى الربيعي بعدد زوار المجمع A مع عدد زوار المجمع B .



عدد زوار المجمع A= ١٢ ـ ٧ = ٥

عدد زوار المجمع B = ١٣ ـ ٥ = ٨

لذلك عدد زوار المجمع B اكبر المدى الربيعي للمجمع A .

وعليه المدى الربيعي للمجمع B اكبر المدى الربيعي للمجمع A .

٢٣) تحد : اذا كان المدى الربيعي لمجموعة بيانات يساوي ٩ ، وكان الربيع الاعلى يساوي ٢٧ من قيمة الربيع الادنى .

المدى الربيعي = الربيع الاعلى ـ الربيع الادنى .

٩ = ٢٧ ـ الربيع الادنى ⟵ الربيع الادنى = ٢٧ ـ ٩ = ١٨

٢٤) مسألة مفتوحة : اكتب مجموعة بيانات عند تمثيلها بالشاربين يكون المستطيل طويلاً والشاربين قصيرين .

مقارنة : قارن عدد القيم في المستطيل مع عددها في الشاربين . (شبيه بالسؤال ١٨)

عدد القيم في المستطيل ٤ وفي الشاربين ١ ، ١ من كل جهة .

اكتب / حالات التشابه والاختلاف بين تمثيل البيانات في الساق والورقة والتمثيل في الشاربين .

التمثيل في الساق والورقة نرتب القيم تصاعدياً كما في الشاربين . وفي الساق والورقة نستطيع نميز المجال الذي يكون فيه القيم اكثر بينما الشارب الاكثر والاقل .

الدرس الثالث / التجربة العشوائية Random Experment

فكرة الدرس : التعرف الى التجربة العشوائية . كتابة نتائج التجربة العشوائية بمخطط الشجرة . كتابة النتائج باستعمال قانون العد الاساسي .

المفردات : الفعل العشوائي ، الحدث ، التجربة العشوائية ، النتيجة ، قانون العد الاساسي

واليك المثال التالي : تعلم :

رمى محمد حجر النرد مرة واحدة ، وطلب الى اخته تمارة تسجيل الارقام التي ظهرت .

- ماذا نسمي مجموعة النواتج الممكنة ؟ النرد (الزار)

- ماذا نسمي مجموعة الارقام الاولية ؟
- التجربة العشوائية : كل نشاط تأتي نتائجه مصادفة . (مثل رمى حجر النرد)

الفعل العشوائي : هو فعل يؤدي الى نتيجة غير معروفة مسبقاً .

مجموعة النتائج : هي المجموعة المؤلفة من جميع النتائج الممكنة لفعل عشوائي وتسمى (فضاء العينة)

ويرمز لها (Ω) .

الحدث : هو نتيجة ممكنة او مجموعة من النتائج الممكنة .

مثال ١ / حجر النرد رقم من ١ الى ٦ كل رقم يمكن ان يظهر مرة واحدة ، اي النتائج الممكنة ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١

مجموعة النواتج الممكنة تدعى فضاء العينة وسوف نرمز لها Ω

اذن { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } = Ω تجربة عشوائية بسيطة .

الارقام الاولية هي ٥ ، ٣ ، ٢ وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة نكتبها بشكل مجموعة حدث بسيط .

$E = \{ ٢ ، ٣ ، ٥ \} \subset \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

مثال ٢ / رمي قطعتي نقود معدنية مرة واحدة :

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة .

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث : ظهور وجهين متشابهين على القطعتين .

i) نسمي الوجه الاول للقطعة المعدنية H (الصورة) وسميت الوجه الثاني T (الكتابة)
فسوف تحصل على ٤ نتائج ممكنة ، انشئ مخطط الشجرة ليساعدك على عرض كل النتائج الممكنة كما مبين من مخطط الشجرة مجموعة النتائج هي :

$H \begin{cases} H , H \\ H , H \end{cases}$

$$T\begin{cases}T\,,H\\T\,,T\end{cases}$$

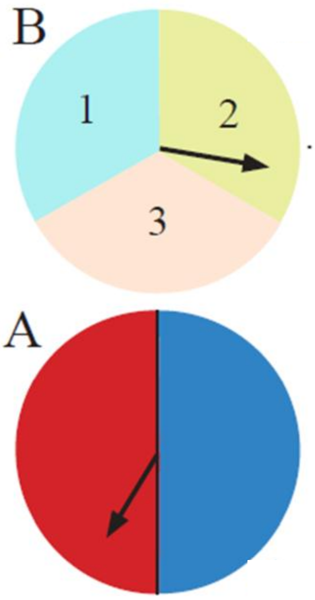
$$\Omega=\{(T\,,T\,),(\,T\,,H\,),(\,H\,,T\,),(\,H\,,H\,)\}$$

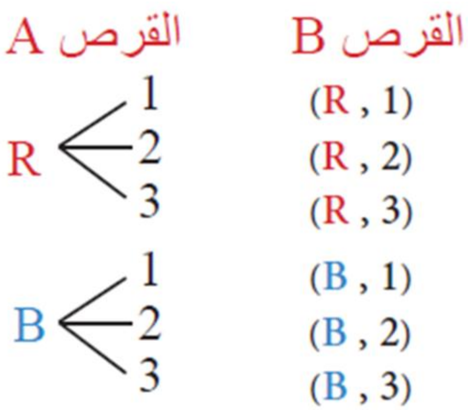
ii) يتحقق الحدث اذا كانت النتيجة $(\,H\,,H\,)$ ، $(T\,,T\,)$ وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة

$$E=\{(\,\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,),(\,\mathrm{H}\,,\mathrm{H}\,)\}\subset\Omega\{(\,\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,),(\,T\,,H\,),(H\,,T\,),(H\,,H\,)$$

مثال ٣ / اطلق طارق مؤشر القرص A ومؤشر القرص B

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة .
ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث . مؤشر القرص B على العدد ٣ .
i) انشئ مخطط الشجرة ليساعدك على عرض كل النتائج الممكنة .





مجموعة النتائج الممكنة $\Omega=\{(\,R,1\,)$ ، $(\,R,2\,)$ ، $(\,R,3\,)$ ، $(\,P,1\,)$ ، $(\,P,2\,)$ ، $(\,P,3\,)\}$

$E=\{(\,R,3\,)$ ، $(\,P,3\,)\}$

قانون العد الاساسي : Fundamental Counting Principle

ينص قانون العد الاساسي : على ان النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تقوم على فعلين عشوائيين هو ناتج ضرب عدد نتائج الفعل الاول (m) في عدد نتائج الفعل الثاني (n) اي ان عدد نتائج الفعلين $m \times n$.

مثال ٤ / رمي قطعتي نقود معدنية مرة واحدة . استعمل قانون العد الاساسي لأجد نتائج التجربة .

مع قطعة النقود الاولى تظهر نتيجتان ولتكن $m =$ ٢

مع قطعة النقود الثانية تظهر نتيجتان ولتكن $n = 2$

استعمل قانون العد الاساسي : عدد نتائج $= m \times n$

لذلك عدد النتائج كلها ٤ = ٢× ٢

ii) في مثال (٣)

مع القرص A عدد النتائج الممكنة ٢ (احمر ، ازرق) ولتكن ٢ = m

مع القرص B عدد النتائج الممكنة ٣ (٣ ، ٢ ، ١) ولتكن $n = 3$

استعمل قانون العد الاساسي : عدد النتائج للتجربة $= m \times n$

لذا عدد النتائج كلها ٦ = ٣ × ٢

iii) رميت حجر النرد واطلقت قرص فيه ٤ أقسام مرقمة (٤,٣,٢,١) ما عدد النتائج الممكنة ؟

مع حجر النرد ٦(١,٢,٣,٤,٥,٦) نتائج ولتكن ٦ = m مع القرص ٤ (٤,٣,٢,١) نتائج ولتكن ٤ = n

استعمال قانون العد الاساسي: عدد النتائج للتجربة = $m \times n$

لذا عدد النتائج كلها ٢٤ = ٤ × ٦

تأكد من فهمك:

(١) تريد سعاد الجلوس على كرسي من بين ٨ كراسي مرقمة من ١ الى ٨

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة.

مجموعة النتائج الممكنة $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (جلوسها على كرسي يحمل رقماً زوجياً)

الحدث مجموعة لنتائج الممكنة $E = \{2,4,6,8\}$

iii) اكتب جميع النتائج الممكنة مستعملاً مخطط الشجرة ثم جد:

٢) رمي قطعة نقود واطلاق مؤشر القرص المقابل اكتب مجموعة النتائج الممكنة

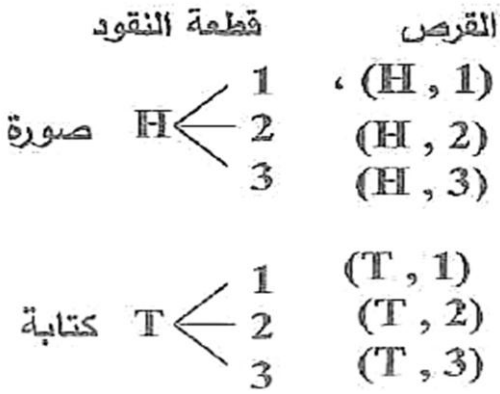
مع قطعة النقود $2(H, T)$ نتيجة ٢ = m

مع القرص ٣(١,٢,٣) نتائج ولتكن ٣ = n

لذا عدد النتائج الممكنة ٦ = ٣ × ٢ = $m \times n$

٣) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ظهور كتابة ووقوف المؤشر على رقم ١) $\mathbb{E} = \{(T, I)\}$

الشجرة



٤) لدى مهند ٢ ستر سوداء ولديه أيضاً قميص ابيض وقميص نيلي وقميص رمادي بكم طريقة يمكن لمهند ان يرتدي قميصاً وسترة معاً.

مع الستر ٢ (سوداء وبنية) نتيجة ٢ = m ومع القمصان ٣ (ابيض ، نيلي ، رمادي) ٢ = n

عدد النتائج (الطرق التي يرتدي بها قميص وسترة) = $m \times n$ = ٣ × ٢ = ٦ طرق

تدرب وحل التمرينات:

٥) تنتظر ساره وامل الباص من بين ٦ باصات تحمل الارقام من ١ إلى ٦

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة n = {١,٢,٣,٤,٥,٦}

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ركوب سارة باصاً يحمل رقم فردي أصغر من ٦)

$$\mathbf{E} = \{1,3,5\}$$

iii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ركوب أمل باصاً يحمل رقم زوجي)

$$\mathbf{E} = \{2,4,6\}$$

٦) ارمي حجر النرد واطلاق مؤشر القرص المقابل

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة

$\{(\boldsymbol{R},1),(\boldsymbol{R},2),(\boldsymbol{R},3),(\boldsymbol{R},4),(\boldsymbol{R},5),(\boldsymbol{R},6),(B,1),(B,2),(B,3),(B,4),(B,5),$
$(B,6),(y,1),(y,2),(y,3),(y,4),(y,5),(y,6)\}$

الدرس الرابع / الحدث The Event

فكرة الدرس : يتعرف الى الحدث والاحداث المستقلة وغير المستقلة

التمييز بين الاحداث المستقلة وغير المستقلة

يتعرف الحدث الأكبر.

المفردات: الحدثان المستقلان، الحدثان المترابطان ، الحدث المركب.

يتعرف الحدث الأكبر.

واليك المثال التالي: تعلم:
صندوقان يحتوي الأول على كرات حمر وصفر يحتوي الصندوق الثاني كرات خضر وزرق سحبت كرة من كل صندوق :

- ماذا نسمي طريقة السحب ؟
- ماذا تسمي النتائج ؟
- وما العلاقة بين النتيجتين؟

يمكننا أن نسمي العملية في فقرة تعلم (تجربة Experiment)

أما الحدث Event : فهو مجموعة نتائج أو نتيجة واحدة أحياناً. والاحداث قد تكون مستقلة أو مترابطة أو مركبة.

الاحداث المستقلة والاحداث غير المستقلة (المترابطة)

Indepentent and Depentent Events

الحدثان المستقلين : اذا كان وقوع او عدم وقوع احدها لا يؤثر على وقوع الآخر أو عدم وقوع الحدث الآخر.
الحدثان غير المستقلين (المترابطين): اذا كان وقوع أو عدم وقوع احدهما يؤثر في وقوع أو عدم وقوع الحدث الآخر.

مثال ١/ الاجابة عن الاسئلة في فقرة تعلم نسمي طريقة السحب بالتجربة.
ونسمي النتائج من هذه التجربة بالأحداث.
اما العلاقة بين هذه الاحداث فتوضح كما يلي:
افرض أن حدث سحب كرة من الصندوق الاول (الكرة المسحوبة حمراء أو صفراء).
افرض أن حدث سحب كرة من الصندوق الثاني (الكرة المسحوبة خضراء أو زرقاء)
لاحظ أن سحب أي كرة من الصندوق الأول لا يؤثر على عدد الكرات في الصندوق الثاني أي ان وقوع الحدث E_1 لا يؤثر على وقوع الحدث E_2 لذا E_1 E_2 حدثان مستقلان.

مثال ٢ / صندوق يحتوي على ٣ كرات حمر و٥ كرات صفراء
حدد ما اذا كان الحدثان مستقلين ام مترابطين في كل مما يأتي:

i) سحب كرة حمراء ثم سحب كرة صفراء دون إعادة الكرات إلى الصندوق.
افرض E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة صفراء من الصندوق.
لعدم اعادة الكرة الحمراء بعد السحب بقى في الصندوق كرتان حمر و ٤ كرات صفر.
أي وقوع الحدث E_1 يؤثر على وقوع الحدث E_2 فهما حدثان غير مستقلين (مترابطين)

ii) سحب كرة حمراء ثم سحب كرة صفراء دون اعادة الكرة الاولى إلى الصندوق

افرض E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة صفراء من الصندوق. لعدم أعادة الكرة الحمراء بعد السحب بقى في الصندوق كرتان حمر و ٤ كرات صفر اي وقوع الحدث يؤثر على وقوع الحدث فهما حدثان غير مستقلين (مترابطين)

مثال ٣ / حدد ان كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في حالة ظهور الصورة بعد رمي قطعة نقود وظهور الكتابة بعد رميها مرة أخرى.
افرض E_1 ظهور الصورة في الرمية الأولى ، E_2 ظهور الكتابة في الرمية الثانية E_1 لا يؤثر في E_2 ,
لذا E_2 ، E_1 حدثان مستقلان.

الاحداث المركبة / Component Events

الحدث المركب : يتكون من حدثين بسيطين أو أكثر وقد تكون مستقلة او غير مستقلة.

مثال ٤ / رمي حجر النرد وتدوير قرص مقسم على اجزاء ملونة متساوية المساحة هل الحدث مركب وما نوع الحدثان البسيطان؟

أن عملية رمي حجر النرد وتدوير القرص تعد حدثاً مركباً من حدثين بسيطين
الحدث الأول ظهور أحد الارقام من ١ الى ٦.
الحدث الثاني ظهور لون معين
ان ظهور رقم لا يؤثر على ظهور اللون لذلك فهما حدثان مستقلان.

مثال ٥/ أعلن محل للملابس عن امكانية الحصول على قطعة اضافية عند شراء الزبون اي قطعة ما نوع الحدثين ؟

تمثيل عملية شراء قطعة الملابس وتسلم قطعة ثانية مجاناً حدث مركب فتسلم القطعة الثانية مجاناً مرتبط بشراء الزبون القطعة الأولى. لذلك فهما حدثان غير مستقلين

تأكد من فهمك / حدد ان كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في الأحداث المركبة

فيما يأتي:

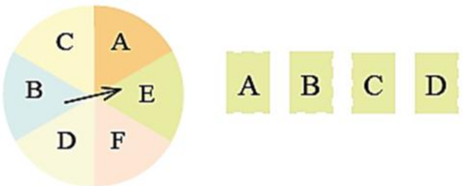
١) اسحب بطاقة من البطاقات المجاورة دون ارجاعها ثم اسحب بطاقة أخرى.

ليكن E_1 حدث سحب البطاقة الأولى دون ارجاعها.
ليكن E_2 حدث مسحب البطاقة الثانية دون ارجاعها.

1 2 3 4 5 6

الحدث E_1 يؤثر على الحدث E_2 فهو حدث مركب لحدثين بسيطين غير مستقلين.

2) اذا اخترت احدى بطاقات الأحرف ودور مؤشر القرص الدوار



اذا تم اختيار احدى بطاقات الأحرف E_1
إذا تم تدوير مؤشر القرص سيقف على احد الاحرف E_2
هنا حدث مركب لكن E_2 لا يتوقف على $_E1$ فيما حدثان مستقلان.

٣) رمي حجر النرد، وسحب كرة من صندوق فيه كرات مختلفة الالوان

E_1 حدث رمي حجر النرد وظهور أحد الارقام من ١ الى ٦.
E_2 سحب كرة وظهور احدى الكرات ذات لون معين.
وقوع E_1 لا يؤثر على E_2 فهما حدثان مستقلان.

٤) صندوق فيه 4 كرات حمراء و3 صفراء ، سحب مهند كرة عشوائيا وسحب محمد ايضاً كرة عشوائيا.

E_1 حدث سحب مهند كرة عشوائياً من احدى الالوان الموجودة
E_2 حدث سحب محمد كرة عشوائياً من احلى الالوان الموجودة.
وقوع E_1 يؤثر على وقوع E_2 (لأن احتمال مهند يريد سحب كرة ذات لون يكون محمد قد سحبها)
لذلك E_1،E_2 حدثان غير مستقلين.

٥) سحب الكرة الأولى من صندوق دون أعادتها ثم سحب كرة ثانية من الصندوق نفسه.

E_1 حدث سحب الكرة الأولى E_2 حدث منحب الكرة الثانية
عندما يسحب الكرة الأولى لا تعود للصندوق مرة أخرى فيؤثر على سحب الكرة الثانية لذلك E_1 ،E_2 حدثان غير مستقلان

6) سحب الكرة الأولى من صندوق مع اعانتها ثم سحب كرة ثانية من الصندوق نفسه..

نفس الحل السابق لكن هذا عندما تسحب الكرة الأولى يتم اعادتها إلى الصندوق لم يتم السحب الكرة الثانية لذلك الحدثان مستقلين لأن E_1 لا يؤثر في وقوع E_2

تدرب وحل التمارين

فكر

١٨) مسألة مفتوحة: يوجد في صندوق ٦ كرات بثلاثة الوان مختلفة اكتب مسألة تتعلق بسحب كرتين عشوائيا دون ارجاعهما إلى الصندوق.

في صندوق في كرة حمراء و ٣ كرات صفراء و ١ كرة خضراء حيث سحب أحمد عشوائيا كرة دون ارجاعها إلى الصندوق ثم قام علي بسحب كرة ثانية عشوائياً من الصندوق أيكون الحدثان مستقلان أم لا عندما تكون الكرتان من نفس اللون؟

(يترك حلها للطالب)

١٩) أكتشف الخطأ ثم صححه : اطلق محمود مؤشر القرص المجاور ثلاث مرات وقال ان ياتي المؤشر على الرقم ٥ في المرات الثلاثة لا يؤثر في النتيجة وقال: صالح ان يأتي المؤشر على الرقم ٥ في المرات الثلاثة يؤثر في النتيجة ايهما أجابته صحيحة ؟ فسر اجابتك.

طبعاً جواب محمود فيه خطأ لأن احتمال ان يحجز الرقم ٥ في الاطلاق الأول وعليه جواب صالح صحيح يؤثرفي النتيجة.

١٠) طقس : توقعت دائرة الأنواء الجوية ان هناك فرصة تساقط مطر يوم الثلاثاء 80% أن فرصة هطول المطر يوم الاربعاء في 30% ما العلاقة بين الحدثين؟

إذا سقط المطر يوم الثلاثاء يحتمل ان لا يسقط يوم الاربعاء.
واذا لم يسقط المطر يوم الثلاثاء يحتمل أن يسقط يوم الاربعاء
وإذا حدث وإن سقط يوم الثلاثاء والاربعاء جائز وممكن جدا.
لذلك العلاقة في حدث مركب والحدثين غير مستقلان

اكتب: ما الفرق بين الحدثين المستقلين وغير المستقلين؟
الحدثين المستقلين هما حدثان يقعان دون أن يتأثر أحدهما بالآخر.
اما الحدثين غير المستقلين هما حدثان يتأثر أحدهما بوقوع الآخر.

الدرس الخامس / الاحتمالات The Probabilities

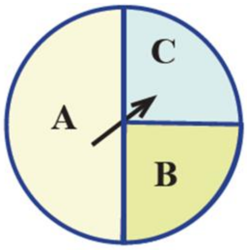
فكرة الدرس: حساب اعتمال وحساب احتمال الحدث المتمم.
المفردات: احتمال الحدث، الحدث المتمم

اليك المثال التالي: تعلم

اخذ مهند القرص الدوار المجاور، اذا دور مؤشر القرص الدوار فما احتمال أن يؤشر المؤشر القرص على كل حرف ؟

الاحتمالية Probability

احتمال الحدث E : هو قياس فرص حدوثه بالتحقيق ويكتب احتمال الحدث بصورة P(E) ويمكن التعبير عنة بكسر عشري يقع بين ١ ، ٠ أو كسر أو نسبة مئوية فأذا كان $P(E) = 0$ فالحدث مستحيل وإذا كان $P(E) = 1$ فالحدث مؤكد.



يمكن أن تجد احتمال حدوث الحدث E باستعمال العلاقة الآتية : $P(\mathbb{E}) = \frac{m}{n}$

إذ ان m عدد النتائج التي يحققها الحدث E .

n عدد النتائج التي تقع كلها في التجربة الواحدة.

مثال ١ / في فقرة تعلم

الطريقة الأولى: بما أن الحرف A يمثل نصف القرص فأن التقدير المعقول لأن يأتي المؤشر على الحرف A هو : $P(\mathbb{E}) = \frac{1}{2}$

وبما أن الحرفان C , B كل منهما يمثل ربع القرص.

فأن التقدير لأن يأتي على الحرف B أو الحرف C هو: $P(B) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$

الطريقة الثانية: من الشكل يلاحظ انه متكون من ٤ ارباع اي ان n = ٤

الجزء A يمثل ربعين اي أن m = ٢ لذلك: $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

الجزء B أو C من القرص يمثل ربعاً واحداً اي ان m = ١ لذلك

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

مثال ٢ / صندوق فيه ١٠ بطاقات خضراء و٣ بطاقات بيضاء سحبت جمانة بطاقة خضراء من دون ارجاعها إلى الصندوق ، ثم سحبت اختها سالي بطاقة بيضاء ما احتمال السحب لكل منهما ؟

يحتوي الصندوق على ١٠ بطاقات خضراء + ٣ بطاقات بيضاء اي ١٣ بطاقة.

فأن احتمال سحب جمانة بطاقة خضراء هو : $P(\text{خضراء}) = \frac{\text{عدد البطاقات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}} = \frac{10}{13}$

لأن البطاقة المسحوبة لم ترجع الى الصندوق، هذا يعني أن في الصندوق الآن ١٢ بطاقة

احتمال سحب بطاقة بيضاء هو : $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ $P(\text{بيضاء}) = \frac{\text{عدد البطاقات البيضاء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}}$

الحدث المتمم Complement Event

الحدث المتمم يعني: يقال للحدثين E_1 ، E_2 متمان اذا كانت نتائج كل الحدث E_1 لا تحقق نتائج الحدث E_2 فأذا كان احتمال حدوثهما ، $P(E_1)$, $P(E_2)$ فان : $P(E_1) + (E_2) = ١$ أي الحدثين E_1، E_2 مستقلان.

مثال ٣ / ، $E1$, $E2$ حدثان متتامان اذا كان $\mathbb{P}(\mathbb{E}_2) = \frac{2}{5}$ فجد 2 $\mathbb{P}(E_1)$ - (PE_1) ثم اكتبه بوصفه نسبة مئوية وكسراً عشريا.

بما أن E_1، E_2 حدثان متتامان فأن

$$\boldsymbol{P(E_1) + p(E_2) = 1}$$

$$P(E_1) + \frac{2}{5} = 1 \rightarrow P(E_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

كتابتة نسبة مئوية $P(E_1) = \frac{3}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$ نجعل مقام الكسر ١٠٠

كتابتة كسر عشري $P(\boldsymbol{E_1}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{10} = 0.6$ نجعل مقام الكسر ١٠

مثال ٤ / سلة فيها ٣ كرات زرق ، ٧ كرات حمر ، سحبت كرة عشوائيا احتمال ان تكون الكرة زرقاء هو $\frac{3}{10}$ ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء

الفرض ان $P(\boldsymbol{E_1}) = \frac{3}{10}$ احتمال الكرة زرقاء
افرض ان $P(\boldsymbol{E_2})$ احتمال الكرة المسحوبة ليست زرقاء
الحدثان متتامان اي ان:

$$P(E_1) + P(E_2) = 1$$

$$\frac{3}{10} + P(E_2) = 1$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$$

لذا احتمال ان تكون الكرة المصحوبة غير زرقاء هو $\frac{7}{10}$ أو ٠.٧ او ٧٠%.

تأكد من فهمك /

لدينا البطاقات المجاورة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | جد احتمال ما يأتي :

١) البطاقة تحمل رقم زوجي:

الحدث E_1 تحمل الارقام ٢، ٤، ٦، ٨ وعدد البطاقات ٨

$$P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5 = 50\%$$

٢) البطاقة تحمل رقم أولي:

E_2 حدث المجموعة تحمل الارقام غير الاولية وهي {٧,٥,٣,٢} فان :

$$P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

٣) البطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على ٥

E_2 حدث المجموعة التي ارقامها تحمل الرقم الذي يقبل القسمة على ٥ وهي {٥}.

$$(E_2) = \frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{2}} = \frac{0.5}{4} = \frac{0.5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{12.5}{100} = 12.5\% = 0.125$$

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة اكتب احتمال:

٤) ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ :

E_1 حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ وهي المجموعة {٣,٦} عددها ٢

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33 = 33\%$$

٥) ظهور العدد ٧ : وبما أن ٧ لا يوجد في النرد الاحتمال مستحيل لذلك P (٧) = ٠

٦) ظهور الأعداد المحصورة بين ٦,٢ وهي ٥,٤,٣

الحدث $\mathbb{E}_2 = \{5,4,3\}$ لذلك $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

٧) اذا كان احتمال ظهور عدد فردي في رمي حجر النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{2}$ فما احتمال ظهور عدد زوجي ؟

بما أن مجموعة الارقام على حجر النرد {١,٢,٣,٤,٥,٦} والحدث $\mathbb{N} = \{1, 2,3\}$

ولذلك : $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

8) اذا كانت الاحداث E_1 ، E_2 ، E_3 متتامات وكان $\mathbb{P}(\mathbb{E}_1) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(\mathbb{E}_3) = \frac{1}{4}$ فما قيمة P(E)؟

$$P(E_1) + P(E_2) + \mathbb{P}(E_3) = 1 \rightarrow \frac{2}{3} + P(E_2) + \frac{1}{4} = 1$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 8 - 3}{12} = \frac{1}{12} = 8\%$$

9) استعمل القرص المجاور وجد احتمال كل نتيجة ممكنة ثم تحقق

النتيجة	اصفر	اخضر	ازرق
الاحتمال	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

الدرس السادس / الاحتمالات التجريبي والاحتمال النظري .
Experimental Probability and Theoretical Probability

فكرة الدرس: يحسب الاحتمال النظري . يحسب الاحتمال التجريبي

المفردات: الاحتمال النظري ، الاحتمال التجريبي ، فضاء العينة

واليك المثال التالي: تعلم

يتدرب لاعب كرة القدم على تحسين أدائه في تسجيل أهداف في ضربات الجزاء، فقد سجل ٢٠ هدفاً من ٢٥ ضربة جزاء ، نلاحظ من هذين العددين انه سجل اهداف أكثر مما يخطئها كيف يمكنك أن تقدر احتمال إصابة الهدف في الصرية المقبلة.

حدد الاحتمال في فقرة تعلم عن طريق اجراء التجربة وتسمى الاحتمالات التجريبية ، اما الاحتمالات النظرية فأنها تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجة إلى إجرائها فيكون:

الاحتمال التجريبي : فيه تقدر أرجحية الحدث بتكرار تجربة مرات عدة، ثم عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث.

$$\text{الاحتمال التجريبي} \approx \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{العدد الكلي للتجارب}}$$

الاحتمال النظري : يستعمل لتقدير احتمالات الحدث باستعمال قوانين العد دون اللجوء إلى تكرار التجربة .
وعندما تكون كل النتائج الممكنة متساوية في احتمال حدوثها

$$\text{الاحتمال التجريبي} = \frac{\text{عدد النتائج التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها (عدد عناصر فضاء العينة)}}$$

مثال ١ / في فقرة تعلم احتمال اصابة الهدف في الضربة المقبلة $\frac{20}{25}$ اي $\frac{4}{5}$:

(أي عدد الاهداف التي سجلها من مجموع الأهداف الكلية)

مثال ٢ / بعد اطلاق مؤشر القرص ٢٠ مرة سجلت النتائج في الجدول ادناه:

i) هل هذا الاحتمال نظري ام تجريبي؟
هذا الاحتمال تجريبي الا انه يعتمد على تكرار التجربة (٢٠ مرة)

ii) جد احتمال ان يأتي المؤشر على الحرف A

الاحتمال التجريبي $\approx \dfrac{\text{عدد المرات التي اصيب الحرف } A}{\text{العدد الكلي للتجربة}}$

$$P(A) \approx \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

لذا الاحتمال التقريبي بأن يأتي المؤشر على الحرف A هو $\frac{1}{2}$ أو ٠.٥ أو ٥٠%

مثال ٣ / سحب محمد كرة من صندوق يحتوي على ٥٠ كرة ، ٢٠ كرة حمراء ، ١٧ كرة بيضاء ١٣ كرة صفراء.

i) هل هو احتمال نظري ام تجريبي ؟
ii) جد احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء؟

الاحتمال نظري، لأن كل النتائج متساوية في احتمال حدوثها، ثم لا توجد حاجة لتكرار التجربة.
عدد عناصر فضاء العينة ٥٠ (عدد الكرات في الصندوق)

الاحتمال النظري = $\frac{\text{عدد النتائج التي تحقق فيها الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها(عدد عناصر فضاء العينة)}}$

احتمال سحب كرة صفراء هو : $\frac{13}{50} = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = P(A)$

نعوض عن عند الكرات الصفراء ١٣ وعدد الكرات كلها ٥٠
لذا احتمال سحب كرة صفراء هو $\frac{13}{50}$ من أو ٠.٢٦ أو% ٢٦
النسبة المئوية أن تجعل المقام ١٠٠ كذلك الكسر العشري أن تجعل المقام ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ ...

مثال ٤ / استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج لمي قطعتي نقود ٨ مرات وأجب عما يأتي:

النتائج	التكرار
H , H	3
H , T	2
T , H	1
T , T	2

١) ما الاحتمال النظري للحصول على صورتين ؟
٢) ما الاحتمال التجريبي للحصول على صورتين؟
فضاء العينة لرمي قطعتي نقود مرة واحدة هو :
$$\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

عدد عناصر فضاء العينة ـ ٤
١) عدد مرات ظهور (H , H) هي مرة واحدة عند رمي قطعتي النقود.

$$P(H, H) = \frac{\text{عدد ظهور} (H, H)}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{1}{4}$$

اذن الاحتمال النظري = $\frac{1}{4}$ أو ٠.٢٥ أو ٢٥%

ii) عدد مرات ظهور (H , H) هو ٣ مرات عند رمي قطعتي النقود ثماني مرات.

$$P(H, H) = \frac{\text{عدد ظهور} (H, H)}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{3}{4}$$

لذا الاحتمال التجريبي ≈ $\frac{٣}{٨}$ = ٠.٣٧٥ = ٣٧.٥%

تدرب وحل مسائل حياتية /

١٦) زراعة لدى طارق كيس فيه ١٢٠ بذرة زهور حمر وصفر فاذا كان ٣٠% بذور زهور صفر تشر طارق البذور في حديقتة، بعد أسبوعين لاحظ ظهور أول الازهار ، ما احتمال ان تكون النبتة الحمراء.

عدد البذور الصفراء $\frac{30}{100} \times 120 = 36$

عدد البذور الحمراء $120 - 36 = 84$

$$P(R) = \frac{84}{120} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$$

١٧) رياضة: في تدريب على كرة السلة، أصاب محمد السلة ١٣ مرة من ٣٠ رمية، ما احتمال ان يصيب محمد السلة في الرمية التالية ؟ وما نوع الاحتمال

الاحتمال تجريبي $P(A) = \frac{13}{30}$

١٨) وقت : اجريت دراسة على ٢٥٠ شخص للوقف على طريقة معرفتهم الوقت استعمل الجدول المجاور وجد احتمال ان يستعمل الشخص هاتفة المحول في ذلك.

الاسلوب	عدد الاشخاص
ساعة يد	75
ساعة حائط	30

$P(\text{ساعة يد}) = \frac{75}{250} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$ احتمال ساعة يد

$P(\text{ساعة حائط}) = \frac{30}{250} = \frac{3}{25} = \frac{3\times4}{25\times4} = \frac{12}{100} = 12\%$ ساعة حائط

$P(\text{ساعة هاتف}) = \frac{145}{250} = \frac{29}{50} = \frac{58}{100} = 58\ \%$ ساعة هاتف

لذلك احتمال أن يستعمل الشخص هاتفه المحول في ٥٨%

١٧) طقس: يمثل الجدول ادناه درجات الحرارة خلال اسبوع في أحد فصول السنة

اليوم	السبت	الأحد	الأثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
درجة الحرارة	15	29	25	21	16	18	20

ما احتمال ان تكون درجة الحرارة اقل من ٢٠٠ في اليوم التالي؟ بين نوع الاحتمال.

تكون درجة الحرارة اقل من ٢٠ في أيام السبت والثلاثاء والاربعاء والخميس

اي ٤ ايام فقط في $P(\text{اقل من } 20) = \frac{٤}{٧} = ٠.٥٧ = ٥٧\%$

اذ احتمال أن الحرارة اقل من ٢٠ هو ٥٧% والاحتمال نظري

١٨) مطعم: دخل ١٠ اشخاص أحد مطاعم الكباب ، ٤ منهم طلبوا كباب ، ما الاحتمال التجريبي في أن لا يطلب الشخص التالي كيايا ؟

4 =٦٤ - ١٠ عدد الذين لم يطلبوا كباب

$P(A) \approx \frac{4}{10} \approx 40\%$

فكر

١٩) مسألة مفتوحة: اجريت دراسة احصائية على ٣٠ شخصاً عن لونهم المفضل من الالوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر الابيض) اعمل جدولاً لكل النتائج الممكنة اذا كان $\frac{2}{5}$ هو الاحتمال التجريبي لأن يكون اللون المفضل هو اللون الأزرق.

اللون	الاحتمال
ازرق	%40
احمر	%20
اخضر	%20
ابيض	%20

$P(\text{ازرق})\,\frac{2}{5} = \%40$

باقي الالوان $\approx 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(\text{آحمر}) \approx P(\text{اخضر}) \approx \mathbb{P}(\text{ابيض}) \approx \frac{1}{5} = 20\%$

الدرس السابع / خطة حل المسألة (تمثيل المسألة)

فكرة الدرس: أحل المسألة باستعمال (تمثيل المسألة)

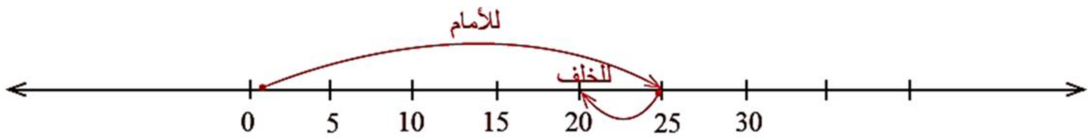
اليه المثال التالي: تعلم

طول ملعب ١٠٠ متر ، فأذا ركض محمد ٢٥ متراً إلى الامام و ٥ امتار الى الخلف فيكم مرة عليه ان يكرر
العملية حتى يصل إلى نهاية الملعب.

أفهم : ما معطيات المسألة ملعب طوله ١٠٠ متر. يركض محمد الى الامام ٢٥ متر ويرجع ٥ امتار الى الخلف. ما المطلوب من المسألة 2 كم مرّة عليه أن يكرر العملية حتى يصل إلى نهاية الملعب.

خطط: كيف تحل المسألة؟ أمثل المسألة على مستقيم الاعداد

حل: أرسم مستقيم الاعداد واقسمة على القسام مناسبة الطول.



٢٥ متر للإمام ، ٥ أمتار للخلف

اي في كل مرة يقطع $25 - 5 = 20\ m$

العدد الكلي للمرات ٥ ـ ٢٠ + ١٠٠

تحلق : تأكد من صحة حلك: نضرب طول المسافة التي يقطعها في كل مرة في ٥

$$20 \times 5 = 100\ m$$

مسائل

١) اشترى أحمد كتاب بمبلغ ٢٥ ألف و ٥٠٠ دينار فإذا دفع احمد ٣٠ ألف دينار فكم يمكن ان يسترد الباقي اذا كان لدى البائع قطع نقدية من الفئتين ١٠٠٠ دينار و ٥٠٠ دينار

دينار يجب ان يسترد $4500 = 30000 - 25500$

اما ٤ قطع نقدية من فئة ١٠٠٠ دينار وقطعة من فئة ٥٠٠ دينار.

أو ٩ قطع نقدية من فئة ٥٠٠ دينار.

التحقق : دينار ٤٥٠٠ = ٥٠٠ + ٤٠٠٠ = ٥٠٠ + ٤ × ١٠٠٠

دينار ٤٥٠٠ = ٩ × ٥٠٠ أو

٢) يركض لاعب في كل مرة 8m ثم يتراجع ٢ متر فاذا كانت المسافة الواجب قطعها 60m فكم مرة يكرر الركض ليقطع المسافة كاملة ؟

شبيه المثال السابق:

في كل مرة يقطع m ٦ = 8 - 2

العدد الكلي للمرات 10 = ٦ + ٦٠

المسافة ٦٠ = ٦ × ١٠

التحقق:

3) ارادت جمانة ان ترتب خمس كتب لديها على الرف، بحيث يكون كتابة الرياضيات أولها وكتاب اللغة العربية في اخرها فيكم طريقة يمكن ترتيب الكتب الخمسة على الرف؟

بما أن الرياضيات واللغة العربية مواقعهما ثابتة أذن عدد المكتب التي يراد ترتيبها ٣ـ٢ـ٥

عدد ترتيبات التي ممكن أن ترتب بها الكتب $3 \times 2 = 6$

٤) يقف مهند ومحمد واحمد ومحمود في خط مستقيم فبكم طريقة يمكن ترتيبهم ؟

كل ولد يمكن أن يغير ترتيبه ٣ مرات لذلك توجد طريقة ١٢ ـ ٣ × ٤ للترتيب

٥) في اختبار الرياضيات طريقة اعتمد القاء قطعة معدنية لك (٥) اسئلة من نوع الخطأ والصواب هل هذه الطريقة جيدة للحصول على درجة جيدة في الاختبار؟

كلا لأن هذه الطريقة فيها احتمال ٥٠% صح أو خطأ.

chapter 7 Review مراجعة الفصل السابع

المفردات : تحفظ من صفحة ٩٢ من الكتاب لأهميتها .

الدرس الأول : مقياس النزعة المركزية والمدى

مثال / الجدول التالي يبين معدل درجات الحرارة الشهري لكل مدينتي بغداد والقاهرة .

بغداد	١٧	٣٤	٢٢	٢٥	٩	٣٤	٨	١١	٢٣
القاهرة	٢٧	١٩	١٤	٢١	١٤	١٧	٢٤	٢٢	٢٤

مثل البيانات بالساق والورقة

بغداد	الساق	القاهرة
٨ ٩	٠	
١ ٧	١	٩ ٧ ٤ ٤
٣ ٥	٢	٧ ٤ ٢ ١
٢	٣	
٤ ٤		

تدريب / الجدول التالي بيانات مجموعتين A , B

A	١٠	٢٦	٣٦	٢٠	١٤	٢٢	٣٦
B	٢٥	١٩	١٤	٢١	١٤	١٧	٢٤

i) مثل البيانات بالساق والورقة

B	الساق	A
4 4 7 9	1	٤ ٠
1 4 5	2	٦ ٢ ٠
	3	٦ ٦

ii) اي المجموعتين مداها اكبر .

٣٦ – ١٠ = ٢٦ مجموعة A

٢٥ – ١٤ = ١١ مجموعة B

الدرس الثاني : تمثيل البيانات ببيان الشاربين

مثال / استعمل البيانات التالية لتمثيلها ببيان الشاربين

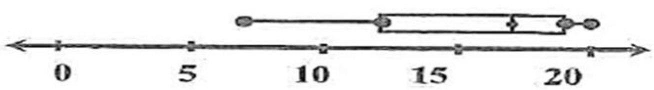
١٦ ، ١٧ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٧ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٧

الترتيب: 7 , 10,14 , 16 , 17, 17 , 18,20 , 20

الوسيط = ١٧ الربيع الادنى = $\frac{10+14}{2} = 2$

الربيع الاعلى = $\frac{18+20}{2} = 19$

القيمة الكبرى = ٢٠ القيمة الصغرى = ٧



تدريب / استعمل البيانات التالية لتمثيلها ببيان الشاربين . ثم جد :

٨٥ ، ٩٠ ، ٩٠ ، ٨٠ ، ٨٢ ، ٨٧ ، ٩٠ ، ٩٠ ، ٨٠ ، ٨٧

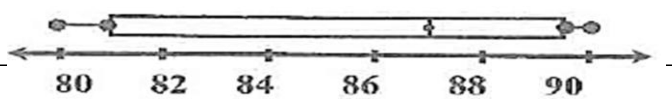
80 , 80 , 82 , 85 87 , 87 90 , 90 , 90 , 90

الوسيط = $\frac{87+87}{2} = 87$

الربيع الادنى = $\frac{80+82}{2} = 81$

الربيع الاعلى = $\frac{90+90}{2} = 90$

القيمة الكبرى = ٩٠ القيمة الصغرى = ٨٠



i) المدى لهذه المعلومات

المدى الربيعي = ٩٠ – ٨١ = ٩

المدى = ٩٠ – ٨٠ = ١٠

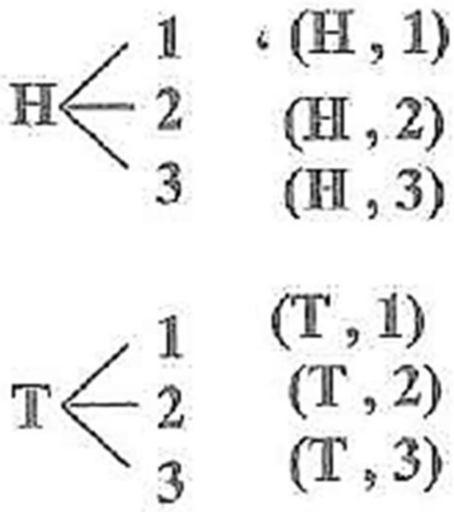
ii) جد الربيع الادنى = ٨١ والربيع الاعلى = ٩٠

iii) الوسيط = ٨٧

الدرس الثالث : التجربة العشوائية

مثال : ارم قطعة نقود واطلق مؤشر القرص المقابل اكتب مجموعة النتائج الممكنة بأستعمال مخطط الشجرة وجد عددها .	تدريب ١ / يبيع احد المحلات المثلجات في علب صغيرة ومتوسطة ، يمكن للزبون اختيار مثلجات بطعم الفانيلا او الشوكلاته او الفستق اكتب مجموعة النتائج الممكنة امام الزبون .

فانيلا → (فانيلا ، ص)



مجموعة النتائج هي :

$\{(H,1),(H,2),(H,3),(T,1),(T,2),(T,3)\}$

عددها $2\times 3=6$

لذلك مجموعة النتائج الممكنة =

{(فستق ، ص) ، (شوكولاته ، ص) ، (فانيلا ، ص)

(فستق ، م) ، (شوكواته ، م) ، (فانيلا ، م) }

عددها ٦ = ٣ × ٢

تدريب ٢ / يرمي شخص حجر النرد ويطلق مؤشر قرص فيه ٤ اقسام متساوية مرقمة من ١ الى ٤ استعمل قانون العد الاساسي وجد عدد نتائج الممكن .

$m=6 \quad , \quad n=4$

عدد النتائج $= m\times n$

عدد النتائج $6\times 4=24$

الدرس الرابع / الحدث

مثال / حدد الحدثين المستقلين والحدثين المترابطين في كل ما يأتي :

i) كيس فيه ٦ كرات زرقاء ، ٣ كرات بيضاء ، سحب كرتين الواحدة تلو الاخرى دون اعادة الاولى .

افرض E_1 سحب الكرة الاولى (زرقاء او بيضاء) ، E_2 سحب كرة ثانية دون اعادة الكرة الاولى اي اختلف عدد الكرات في الصندوق في السحبة الثانية (E_1 يؤثر على E_2)

اذن E_2 ، E_1 حدثان غير مستقلين (مترابطين)

ii) رمي حجر نرد وقطعة نقود ، ظهور العدد ٥ على حجر النرد والصورة على قطعة النفود

أفرض E_1 ظهور العدد ٥ على حجر النرد ، E_2 ظهر الصورة على قطعة النقود .

لا يؤثر E_1 في E_2 اذن E_1 ، E_2 حدثان مستقلان .

تدريب / حدد الحدثين المستقلين والحدثين غير المستقلين (مترابطين) لكل مما يأتي :

i) سحب بطاقتين متتاليتين من مجموعة تحتوي على ٢٦ بطاقة حمراء ، ٢٦ سوداء ان تكون الاولى حمراء والثانية سوداء اذ لم يرجع الاولى الى المجموعة .

E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة سوداء دون اعادة الكرة الحمراء .

E_2 يتأثر بـ E_1 لذلك الحدثان غير مستقلين (مترابطان) .

ii) اطلق مؤشر قرص فيه ٨ اقسام متساوية من ١ الى ٨ ورمي حجر النرد .

E_1 حدث اطلاق المؤشر ، E_2 حدث رمي حجر النرد ولا يتأثر احدهما بالآخر فهما مستقلان .

iii) ان يصيب رقماً اكبر من ٤ على القرص ويحصل على رقم اصغر من ٤ على حجر النرد .

حدث E_1 يصيب رقم اكبر من ٤ على القرص E_2 حدث يحصل على رقم اصغر من ٤ على حجر النرد .

E_1 لا يؤثر في وقوع E_2 فهما حدثان مستقلان .

الدرس الخامس / الاحتمالات

مثال / جد الاحتمالات لكل حدث مما يأتي :

i) ظهور عدد فردي بعد رمي حجر النرد $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

ii) ظهور العدد ٤ بعد رمي حجر النرد $P\ (E) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$

iii) كيس فيه ٦ كرات حمر ، ٥ كرات صفر ، احتمال ان تكون الكرة حمراء . $P(E) = \frac{6}{5+6} = \frac{6}{11} \approx$ $0.55 = 55\%$

تدريب / جد الاحتمالات لكل حدث مما يأتي :

i) ظهور عدد اكبر من ٥ بعد رمي حجر النرد $P(E) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$

ii) ظهور الكتابة بعد رمي قطعة نقود $P\ (E) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

iii) سحب بطاقة تحمل الحرف E من مجموعة البطاقات ؟ $\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{E}$

$$P\ (E) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$

iv) سحب كرة سوداء من صندوق فيه ١٠ كرات سود ، ٧ كرات بيض .

$$P\ (E) = \frac{10}{10+7} = \frac{10}{17} = 59\%$$

الدرس السادس / الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

مثال ١ / يمثل الجدول التالي بعد رمي حجر النرد ٥٧ مرة قدر احتمال ظهور العدد ٣

النتيجة	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المرات	١٠	٨	٧	١٣	٧	١٢

$$P\ (E) \approx \frac{\text{عدد مرات تحقيق الحدث}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{7}{57}$$

مثال ٢ / ما احتمال ظهور العدد ٣ بعد رمي حجر النرد ؟ الاحتمال النظري

عدد عناصر فضاء العينة هو ، { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ }

$$P\ (E) = \frac{\text{عدد النتائج التي تحقق الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{1}{6}$$

تدريب / صندوق فيه :

٣ كرات حمراء ، ١ كرة زرقاء ، ٤ كرات بيض ما احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق ؟

احتمال سحب كرة حمراء $$P\ (E) = \frac{3}{3+1+4} = \frac{3}{8}$$

اختبار الفصل السابع Chapter 7 Test

١) الجدول المجاور يبين معدل درجات بعض الطلاب الصف الثاني المتوسط لشعبتين في موضوع الرياضيات

شعبة A	٨٦	٦٣	٧١	٦٦	٨٣	٧١	٦٠	٦١	٦٠	٨٠	٩٥
شعبة B	٩٠	٨٤	٦٥	٧٧	٦٧	٩٠	٨٤	٨١	٧٧	٩٩	٨٥

i) مثل البيانات بالساق والورقة :

ii) اي الشعبتين مداها اكبر ؟

iii) قارن الوسيطين للشعبتين .

شعبة A الورقة	الساق	شعبة B الورقة
0 0 1 3 6	6	7 5
1 1	7	7 7
0 3 6	8	5 4 4 1
5	9	9 0 0

مدى شعبة A = ٩٥ ـ ٦٠ = ٣٥

مدى شعبة B = ٩٩ ـ ٦٥ = ٣٤

مدى شعبة A اكبر من مدى شعبة B

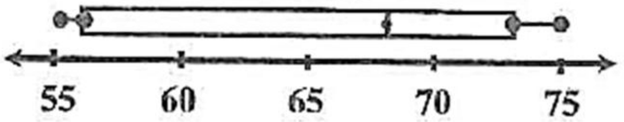
وسيط A = ٧١ وسيط B = ٨٤

استعمل مجموعة البيانات التالية ٧٣ ، ٥٦ ، ٥٦ ، ٧٣ ، ٦٨ ، ٧٣ ، ٥٩ ، ٥٦ ، ٧٣ ، ٦٨ كي تنشأ بيان شاربين ثم اجب عما يلي .

i) ما مدى هذه البيانات

ii) جد الربيع الادنى والربيع الاعلى .

iii) كيف تفسر ان احد الشاربين اقصر من الآخر ؟



الترتيب :

56 , 56 , 56 , 59 , 68 , 68 , 73 , 73 73 , 73

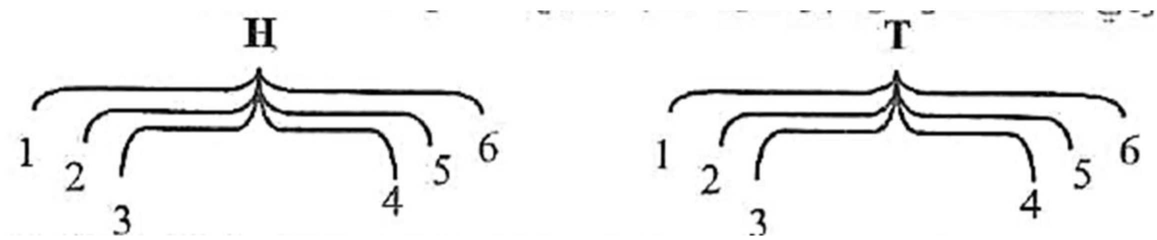
i) المدى = ٧٣ ـ ٥٦ = ١٧

ii) الربيع الادنى = $\frac{56+56}{2}$ = ٥٦ الربيع الاعلى = $\frac{73+73}{2}$ = ٧٣

الوسيط = $\frac{68+68}{2}$ = ٦٨ القيمة الكبرى = ٧٣ القيمة الصغرى = ٥٦

iii) لأن الوسيط اقرب الى الاعلى

٣) رمي قطعة نقود وحجر النرد اكتب جميع النتائج الممكنة بأستعمال مخطط الشجرة .



{ (H,1) , (H,2) ,(H,4) ,(H,5),(H,6), (T,1), (T,2) ,(T,3) ,(T,4) ,(T,5) ,(T,6) }

٤) استعمل قانون العد الاساسي لايجاد عدد الاحتمالات في السؤال (٣)

عدد النتائج $m \times n = ٢ \times ٦ = ١٢$ $\quad n = ٦ \quad m = 2$

٥) كيف تميز بين حدثين من كونها مستقلين او مترابطين ؟ وضح ذلك بمثال .

المستقلان لا يؤثر احدهما على وقوع الاخر . مثل رمي قطعة نقود وحجر النرد .

اما المترابطان يتأثر احدهما بوقوع الاخر . مثل سحب كرة حمراء من سلة تحوي كرتين حمراء وكرتين بيضاء دون اعادتها ثم سحب مرة اخرى كرة فأن النتيجة الثانية تتأثر بالسحبة الاولى

٦) رمي حجر النرد ، اوجد احتمال ان تكون الارقام الظاهرة تقبل القسمة على ٣ .

الارقام التي تقبل القسمة على ٣ هي ٣ ، ٦ لذلك $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

لأن فضاء العينة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

٧) اذا كان E_1 ، E_2 حدثان متتامان وكان $P(E_1) = \frac{2}{9}$ جد $P(E_2)$

$$P(E_2) + P(E_1) = 1 \rightarrow P(E_2) + \frac{2}{9} = 1 \rightarrow P(E_2) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

٨) يمثل الجدول التالي بعد رمي قطعة نقود ١٥ مرة قدر احتمال بظهور الصورة .

$$P(E) \approx \frac{9}{15} = 0.6 = 60\%$$

٩) رمي حجر النرد ، جد احتمال عدم ظهور الرقم ٣ ، اذا لم يظهر ٣ فسيظهر بقية الارقام وهي { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١ } وفضاء العينة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ لذلك

$$P(E) = \frac{5}{6}$$

١٠) صندوق فيه ٥ بطاقات صفر ، ٨ بطاقات زرق ، ما احتمال سحب بطاقة زرقاء ؟

$$P(E) = \frac{8}{8+5} = \frac{8}{13}$$

(انتهى الفصل السابع)

تمرينات الفصول

الفصل الخامس / الهندسة والقياس

Geometry and Measurement

الفصل السادس / الهندسة الاحداثية

Coordinate Geometry

الفصل السابع / الاحصاء والاحتمالات

Statistics and Probabilities

الفصل الخامس

الدرس الأول / علاقة الزوايا والمستقيمات (نظريات)

اختر الاجابة الصحيحة

١) العلاقة بين الزاويتين ٢ و ٣ في الشكل المجاور (ص ٩٧ كتاب)

الجواب / متبادلتان (b)

٢) العلاقة بين الزاويتين ٢ و ٤ في الشكل المجاور (ص ٩٧ كتاب)

الجواب / متناظرتان (d)

٣) في الشكل المجاور اذا كان $m\measuredangle 1 = 60°$ فأن $m\measuredangle 2$ يساوي (ص ٩٧ كتاب)

الجواب / $120°$ (d)

٤) في الشكل المجاور اذا كان $m\measuredangle 1 = 35°$ فأن $m\measuredangle 4$ يساوي (ص ٩٧ كتاب)

الجواب / $35°$ (c)

٥) قياس الزاوية x في الشكل المجاور (ص ٩٧ كتاب)

الجواب / $118°$ (a)

الدرس الثاني / تطابق المثلثات

اختر الاجابة الصحيحة

١) المثلثات في الشكل المجاور متطابقان بسبب (ص ٩٨ كتاب)

الجواب / تطابق اضلاعهما الثلاثة (b)

٢) المثلثان في الشكل المجاور (ص ٩٨ كتاب)

الجواب / غير متطابقين بسبب كون الزاوية غير محددة بين الضلعين (d)

٣) المثلثان في الشكل المجاور (ص ٩٨ كتاب)

الجواب / غير متطابقان بسبب كون المثلثات لا تتطابق بتطابق زواياها الثلاثة (c)

٤) المثلثان في الشكل المجاور متطابقان لذا فأن قيمة x التي تمثل طول الضلع : (ص ٩٨ كتاب)

الجواب / ٩ cm (b)